Corso di Laurea in Matematica– Test di Algebra 2 del 27-3-2012 – Prof. Paolo Papi

Il test deve essere svolto individualmente in un'ora e mezzo; non si possono consultare testi o dispense. Usare le convenzioni tenute a lezione sul prodotto di permutazioni ($\alpha\beta = \alpha \circ \beta$). Gli esercizi con l'asterisco sono più impegnativi.

Esercizio 1 In S_8 si considerino le permutazioni seguenti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sia $x = \alpha\beta^2\gamma^{-1}$. Scrivere x come prodotto di cicli disgiunti, di trasposizioni e di trasposizioni adiacenti. Calcolare l'ordine e la parità di x.

Esercizio 2 Sia $G = U(27)$. Determinare il reticolo dei sottogruppi di G (disegnandone il diagramma di Hasse). Determinare esplicitamente i sottogruppi di ordine minore o uguale a 6. Determinare l'inverso di $\overline{5}$.

Esercizio 3

a. Dimostrare che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine k per $k = 13, 26, 35$.

b. Provare che $f : G \to G$, $f(g) = g^{-1}$ è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.

Esercizio 4 Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una giustificazione se l'affermazione è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. $\mathbb{Z}$ è isomorfo a un suo sottogruppo proprio.

---

2. $\mathbb{Z}$ è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

---

3. $\mathbb{Z}$ è isomorfo a un sottogruppo di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

---

4. $\mathbb{Z}$ è isomorfo al sottogruppo di $\mathbb{Q}$ generato da $1/p, 1/q$, p, $q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1$.

---

5. Se G è finito allora $Aut(G)$ è finito.

---

6. Se $Aut(G)$ è finito allora G è finito.

---

7. Se G è finito allora $|Aut(G)| \geq |G|$.

---

8. Se G è finito allora $|Aut(G)| \leq |G|$.

---

9. Se H, K sono normali in G e $H \cong K$ allora $G/H \cong G/K$.

10*. Se H, K sono normali in G e $G/H \cong G/K$ allora $H \cong K$.

11*. $\mathbb{Q}$ è isomorfo a un suo sottogruppo proprio [Suggerimento: cercare di capire come sono fatti gli omomorfismi $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.]

Esercizio 5 Per $n \in \mathbb{N}$ sia Dic_n il gruppo generato da un elemento a di ordine $2n$ e da un elemento x tale che $x^2 = a^n$, $xax^{-1} = a^{-1}$. Dimostrare che $|Dic_n| = 4n$. Identificare Dic_2 a meno di isomorfismo.