Compito del 23-9-2002

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$ sia fissato un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad r_2 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r_1, r_2.

(b) Determinare equazioni cartesiane per la retta s complanare con r_1, complanare con r_2 e passante per l'origine.

(c) Calcolare la distanza tra il punto P di coordinate $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e il piano π passante per l'origine e contenente r_2.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 ed U lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi

$$\begin{aligned} W_1 &= \{p(t) \in V \mid p(2) = 2\} \\ W_2 &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V \mid a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 = 0\right\} \\ W_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

(a) Dire, motivando la risposta, se W_1, W_2 sono sottospazi di V e se W_3 è un sottospazio di U.

(b) Per i sottoinsiemi W_i che risultano essere sottospazi determinare una base e la dimensione.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'operatore lineare $F : V \to V$,

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 + (a_2 - a_1)t + (a_0 + 2a_2)t^2.$$

(a) Scrivere la matrice A di F rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ presa come base di partenza e di arrivo in V.

(b) Calcolare autovalori e autovettori per A.

(c) Dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. (a) Sia A una matrice quadrata. Definire il polinomio caratteristico di A.

(b) Provare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ individuata dalle condizioni seguenti:

$$G(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad G(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la matrice di G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$ prese rispettivamente come basi di partenza e di arrivo.

(b) Provare che G è iniettiva e determinare una base di $Im(G)$.

(c) Completare la base di $Im(G)$ precedentemente determinata ad una base di $\mathbb{R}^4$.