Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$ sia fissato un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Sia P il punto di coordinate $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e sia s la retta passante per i punti di coordinate $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determinare un'equazione cartesiana per il piano α ortogonale ad s e passante per P.

(b) Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per P perpendicolare ed incidente ad s.

(c) Verificare che la retta s è parallela al piano π di equazione $x_1 + x_3 = 0$; calcolare poi la distanza tra s e π.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 ed U lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{p(t) \in V \mid p(1) = 1\} \\
W_2 &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V \mid a_2 \neq 0\right\} \\
W_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \mid a_{11} a_{22} = 0 \right\} \\
W_4 &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \mid a_{12} = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

(a) Dire, motivando la risposta, se W_1, W_2 sono sottospazi di V e se W_3, W_4 sono sottospazi di U.

(b) Per i sottoinsiemi W_i che risultano essere sottospazi determinare una base e la dimensione.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to V$ determinata dalle condizioni seguenti:

$$F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1 - t, \quad F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = t - t^2, \quad F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 1 - t^2.$$

(a) Scrivere la matrice A di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ presa come base di arrivo in V.

(b) Calcolare $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix})$.

(c) Determinare basi per $Ker(F)$ e per $Im(F)$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale.

(a) Si definiscano le nozioni di vettori linearmente indipendenti e di base di V.

(b) Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di V. Si provi che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno tra essi è combinazione lineare degli altri.

Esercizio 5. Si consideri l'operatore lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$F(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di F e dire se F è diagonalizzabile.

(b) Determinare gli autovettori di F.

(c) Determinare una base per il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ somma degli autospazi di F.