Esercizio 1. a) (3 punti) Determinare la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ dell'operatore F su $\mathbb{R}^4$ definito dalle condizioni seguenti:

1. $Ker(F) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0\}$.

2. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 8.

b) (3 punti) Determinare basi per nucleo e immagine dell'operatore G su $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) (3 punti) Stabilire se F e G sono simili.
d) (4punti) Determinare la forma di Jordan di A.

$$\ker F = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Poiché i quattro vettori su cui il valore di F è noto sono una base, F è ben definito su $\mathbb{R}^4$

$$\cancel{F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + F}$$

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice cercata è $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) Gli autovalori di A sono 0, 8, con

$m_a(0)=3 \qquad m_g(0)=2$

$m_a(8)=m_g(8)=1$

Per determinare la forma di Jordan di A basta capire la struttura dell'autospazio generalizzato relativo a 0

Poiché $m_g(0)=2$, ~~[illegible]~~ il blocco di Jordan relativo a 0 è
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque A è simile a
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b)
$$\ker G = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{Im} G = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) F, G non possono essere simili, perché gli autospazi relativi a 0 hanno dimensione diversa

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard si consideri l'operatore lineare T la cui matrice A rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) (5 punti) Dire, motivando la risposta, se T è simmetrico.
b) (5 punti) Determinare una matrice ortogonale N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

a) Calcoliamo la matrice di T rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ (che è ortonormale per il prodotto scalare standard).
Tale matrice è $B = \tilde{N} A \tilde{N}^{-1}$ con $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
Risultando $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ simmetrica, T è simmetrico.

b) Dal teorema spettrale (caso reale) applicato all'operatore L_A si deduce che una tale N non esiste (A non è simmetrica).
Esiste invece N ortogonale tale che $N^{-1}BN$ è diagonale.
Gli autovalori di B sono $0, 5$ con autovettori
$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (relativi a 0) e $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ (relativo a 5)
In questo caso, essendo tali vettori già ortogonali, basta solo normalizzarli. Si ottiene

$$N = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) (5 punti) Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$. Siano $v_1,\dots,v_k$ vettori non nulli a due a due ortogonali. Dimostrare che $v_1,\dots,v_k$ sono linearmente indipendenti.
b) (5 punti) Sia $V=\mathbb{R}_3[t]$ lo spazio dei polinomi reali di grado minore uguale a 3. Sia $W=\{p\in V \mid p(1)+p(-1)=0\}$. Determinare la segnatura della forma quadratica $q: W\to\mathbb{R}$, $q(p(t))=p(1)^2$.

a) Assumiamo $a_1v_1+\dots+a_kv_k=0$ e facciamo vedere che $a_1=\dots=a_k=0$. Prendendo il prodotto scalare con v_i otteniamo

$$0=(a_1v_1+\dots+a_kv_k, v_i)=a_i(v_i,v_i)$$

Poiché $v_i\neq 0$, si ha $(v_i,v_i)>0$ e quindi $a_i=0$. Dall'arbitrarietà di i segue la tesi.

b) Se $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$, risulta $p\in W$ se e solo se $a_0+a_2=0$, dunque $W=\mathbb{R}(1-t^2)\oplus\mathbb{R}t\oplus\mathbb{R}t^3$.

La forma polare di q è

$$g(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3,\ b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3)=\sum_{i,j=0}^{3}a_ib_j$$

e la matrice nella base $\{1,t,t^2,t^3\}$ è $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

La matrice di g_W nella base $\{1-t^2,t,t^3\}$ è $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $x^2(x-2)$, da cui risulta $i_+(g)=1$ $i_0(g)=2$ $i_-(g)=0$