Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x^4 - 16}$$

Risoluzione:

$$\int \frac{dx}{x^4 - 16} = \int \frac{dx}{(x^2+4)(x+2)(x-2)} =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{8} \frac{1}{(x^2+4)} - \frac{1}{32} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{32(x-2)} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2+4} + \frac{1}{32} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

$$= -\frac{1}{32} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{32} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

$$= -\frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{32} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

Esercizio 2. Determinare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_{-\infty}^{\pi} \cos x dx, \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$$

Risoluzione:

1) Bisogna studiare l'esistenza di

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^{\pi} \cos x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \operatorname{sen} x \Big|_a^{\pi} =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} - \operatorname{sen} a$$

Tale limite non esiste: le successioni divergenti $x_n = 2n\pi$ e $y_n = 2n\pi + \pi/2$ sono tali che

$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen} x_n = 0$, $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen} y_n = 1$

2) La funzione integranda non è limitata in un intorno destro di 0. Per $x \to 0^+$ risulta $e^x \sim 1$, $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, per cui $\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} \sim \frac{1}{x}$; poiché $\int_0^1 \frac{1}{x}$ diverge, anche la funzione data non è integrabile in senso improprio in $(0,1)$. Si noti che $\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} > 0$ per $x \in (0,1)$, per cui è lecito applicare criteri di Confronto

Esercizio 3. Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (3+(-1)^n)$$

Risoluzione:

Innanzitutto le serie sono a termini positivi

Poiché $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge,

per il criterio del confronto $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} = +\infty$

Posto $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (3+(-1)^n) = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & n \text{ dispari} \\ 4\left(\frac{1}{3}\right)^n & n \text{ pari} \end{cases}$

risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} & n \text{ dispari} \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} & n \text{ pari} \end{cases}$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, per il criterio della radice la serie converge

Esercizio 4. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Risoluzione:

Il polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ associato all'equazione omogenea ha radici $0, 1$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^x$$

L'integrale generale dell'equazione particolare è $y(x) = c_1 + c_2 e^x + \bar{y}(x)$, dove $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. Essendo 1 radice di $p(\lambda)$, usando il metodo di somiglianza cerchiamo una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = (ax+b)e^x$ e si ottiene $\bar{y}(x) = xe^x$; dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + xe^x$$

$$y'(x) = c_2 e^x + e^x(x+1)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 + 1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \qquad \boxed{y(x) = e^x(x+1)}$$

Esercizio 5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

1. Definire la nozione di primitiva per f.
2. Definire la funzione integrale di f.
3. Enunciare e dimostrare (assumendo il teorema della media integrale) il teorema fondamentale del calcolo integrale.
4. Calcolare

$$\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} e^{t^2}\, dt$$

Risoluzione:

1, 2, 3. Si vedano i testi consigliati

4. Dobbiamo calcolare

$$F'(\operatorname{sen} x)$$

ove F è la funzione integrale di e^{x^2}.

Per la regola di derivazione delle funzioni composte e il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$F'(\operatorname{sen} x) = e^{(\sin x)^2} \cdot \frac{d}{dx} \sin x = e^{(\sin x)^2} \cdot \cos x$$