Soluzioni della prova di ALGEBRA (Informatica)
11-7-2006

Esercizio 1 a) $245 = 5\cdot 7^2$. Poiché un gruppo ciclico ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine, il reticolo ha diagramma di Hasse

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_{245} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle \bar 7\rangle \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & \langle \bar 5\rangle \arrow[d, dash] \\
\langle \overline{49}\rangle \arrow[dr, dash] & & \langle \overline{35}\rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \{\bar 0\} &
\end{tikzcd}$$

Risulta $H = \langle \bar 5\rangle$, $|H| = 49$ e $\mathbb{Z}_{245}/H$ è ciclico di ordine 5.

b) Da $27 = 13\cdot 2 + 1$ segue $1 = 27 + 13\cdot(-2)$ da cui $\overline{13}\cdot\overline{(-2)} = \bar 1$. Dunque l'inverso di $\overline{13}$ è $\overline{-2} = \overline{25}$

Esercizio 2 a) Il caso $|G| = 1$ è banale. Se $|G| \in \{2,3,5\}$ allora G ha ordine primo, dunque è ciclico e quindi abeliano. Se $|G| = 4$ allora è ciclico o di Klein dunque è abeliano. [Dimostriamo dell'ultima asserzione: se in G c'è un elemento di ordine 4, G è ciclico. Altrimenti tutti gli elementi $\neq$ identità hanno ordine 2, cioè $G = \{1, a, b, c\}$, $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Risulta $ab = c$: infatti $ab = a \Rightarrow b = 1$, $ab = b \Rightarrow a = 1$, $ab = 1 \Rightarrow a = b^{-1} = b$. Analogamente segue che il prodotto di due elementi tra a, b, c è uguale al rimanente].

b) $\sigma = (1,7,9)(2,3,10,5,6,8)$ dunque σ ha ordine 6 ed è una permutazione dispari. $\sigma^{-1} = (9,7,1)(8,6,5,10,3,2)$

c) $$o(\sigma^k) = \frac{6}{(6,k)} = 2 \Rightarrow (6,k) = 3$$
$$\Rightarrow k = 3h, \quad h \text{ dispari}$$

Esercizio 3 a) $S(1)=0$, $S(t)=1$, $S(t^2)=t$, $S(t^3)=t^2$

dunque la matrice A di S rispetto a $\{1,t,t^2,t^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\ker S = \mathbb{R}\cdot 1$, dunque se $U = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, si ha $V = \ker S \oplus U$

c) Il polinomio caratteristico di A è t^4, dunque A ha 0 come unico autovalore di molteplicità algebrica 4. Dalla parte b) segue che $m_g(0) = 1 < 4 = m_a(0)$, dunque S non è diagonalizzabile.