

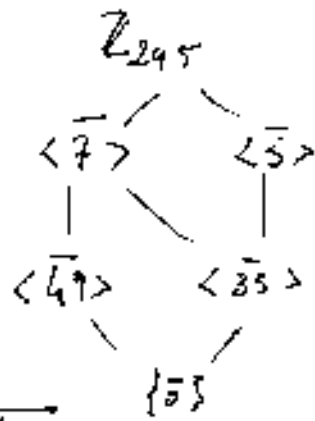
# Soluzioni delle prove di ALGEBRA (Informativa)

11-7-2006

Esercizio 1 a)  $145 = 5 \cdot 7^2$ . Poiché un gruppo ciclico ha uno e uno solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine, il sottogruppo ha isomorfismo di classe

Risulta  $H = \langle \bar{5} \rangle$ ,  $|H| = 49$  e

$\mathbb{Z}_{145}/H$  è ciclico di ordine 5.



b) Da  $27 = 13 \cdot 2 + 1$  segue

$$1 = 27 + 13 \cdot (-2) \quad \text{da cui} \quad \overline{13} \cdot \overline{(-2)} = \overline{1}$$

Dunque l'inverso di  $\overline{13}$  è  $\overline{-2} = \overline{25}$

Esercizio 2 a) Il caso  $|G|=1$  è banale. Se  $16 \in \{2, 3, 5, 7\}$

allora  $G$  ha ordine primo, dunque è ciclico e quindi abeliano. Se  $|G|=4$  allora è ciclico o è Klein. Dunque è abeliano. [Dimostrare dell'ultima affermazione: se in  $G$  c'è un elemento

di ordine 4,  $G$  è ciclico. Altrimenti tutti gli elementi hanno ordine 2, cioè  $G = \{1, a, b, c\}$ ,  $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ . Risultato

$$ab = c : \text{ infatti } ab = a \Rightarrow b = 1, \quad ab = b \Rightarrow a = 1, \quad ab = c$$

$\Rightarrow a = b^{-1} = b$ . Analogamente si può dire il prodotto di due elementi tra  $a, b, c$  è uguale all'elemento 1.

b)  $G = (1, 7, 9)(2, 3, 10, 5, 6, 8)$  Dunque  $G$  ha ordine 6 ed è una permutazione tripla.  $G^{-1} = (9, 7, 1)(8, 6, 5, 10, 3, 2)$

$$c) \quad O(G^k) = \frac{6}{(6, k)} = 2 \quad \Rightarrow \quad (6, k) = 3$$

$$\Rightarrow k = 3k, \quad k \text{ tripla}$$

Esercizio 3 a)  $S(1) = 0$ ,  $S(t) = 1$ ,  $S(t^2) = t$ ,  $S(t^3) = t^2$   
Suggerire la matrice  $A$  di  $S$  rispetto a  $\{1, t, t^2, t^3\}$  e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)  $\ker S = \mathbb{R} \cdot 1$ , dunque se  $U = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ ,  
e' in  $V = \ker S \oplus U$

c) Il polinomio caratteristico di  $A$  e'  $t^4$ , dunque  
 $A$  ha  $0$  come unico autovalore di molteplicita'  
algebraica  $4$ . Dalla parte b) segue che  
 $m_g(0) = 1 < 4 = m_a(0)$ , dunque  $S$  non e'  
diponibile.