Traccia delle soluzioni della prova di Algebra del 7-7-2005

1. Risulta $\sigma_1 = (1234)(56)$, $\sigma_2 = (42)(365)$, $\sigma_3 = (123456)$ e $\sigma_4 = (15)(2364)$ e quindi

   (a) σ_1 e σ_4 sono coniugate perché hanno la stessa struttura ciclica; presa poi, ad esempio, $\tau = (146)$ si ottiene
   $$\sigma_4 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$$

   (b) le permutazioni σ_1 e σ_4 sono di classe pari e quindi i sottogruppi da esse generati sono contenuti in A_6; le permutazioni σ_2 e σ_3 sono di classe dispari e quindi i sottogruppi da esse generati non sono contenuti A_6,

   (c) calcolando gli ordini degli elementi otteniamo che σ_1 e σ_4 generano due sottogruppi, H_1 e H_4, ciclici di ordine quattro, mentre σ_2 e σ_3 generano due sottogruppi, H_2 e H_3, ciclici di ordine sei; pertanto $H_1 \cong H_4$ e $H_2 \cong H_3$,

2. Essendo $\mathbb{U}_{28} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{27}\}$, consideriamo l'ordine dei suoi elementi; risulta:
   $$< \overline{3} >= \{\overline{3}, \overline{9}, \overline{27}, \overline{25}, \overline{19}, \overline{1}\}$$
   e quindi $S =< \overline{9} >= \{\overline{9}, \overline{25}, \overline{1}\}$ è un sottogruppo di ordine tre.

   Essendo poi $\overline{13}$ e $\overline{15}$ elementi di ordine due, come si verifica facilmente, e $\overline{13} \cdot \overline{27} = \overline{15}$ si ottiene che $T = \{\overline{13}, \overline{15}, \overline{27}, \overline{1}\}$ è un sottogruppo (di Klein) di ordine quattro.

   Poiché il gruppo $\mathbb{U}_{28}$ è commutativo le partizioni in classi laterali destre e sinistre coincidono, onde si può costruire il gruppo quoziente per entrambi i sottogruppi, e risulta:
   $$\mathbb{U}_{28}/S = \{S, \overline{3}S, \overline{5}S, \overline{11}S\}$$
   dove
   $$\overline{3}S = \{\overline{3}, \overline{27}, \overline{19}\}, \quad \overline{5}S = \{\overline{5}, \overline{17}, \overline{13}\}, \quad \overline{11}S = \{\overline{11}, \overline{15}, \overline{23}\}$$
   e
   $$\mathbb{U}_{28}/T = \{T, \overline{3}T, \overline{5}T\}$$
   dove
   $$\overline{3}T = \{\overline{3}, \overline{11}, \overline{17}, \overline{25}\}, \quad \overline{5}T = \{\overline{5}, \overline{9}, \overline{19}, \overline{23}\}$$

Infine il gruppo $\mathbb{U}_{28}/S$ è esso stesso un gruppo di Klein e quindi è isomorfo a $\mathbb{U}_8$, mentre $\mathbb{U}_{28}/T$, di ordine tre, non può essere isomorfo a nessuno dei gruppi elencati.

3. Risulta

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ F(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ F(t^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ F(t^3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pertanto $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$. Coordinate rispetto a B di una base di $Ker(F)$ si ottengono risolvendo il sistema omogeneo $AX = 0$; coordinate rispetto a B' di una base di $Im(F)$ si ottengono considerando le righe non nulle di una forma a gradini di A^t. Risulta:

$$Ker(F) = \mathbb{R}(-t+t^3) \oplus \mathbb{R}(-3+2t+t^2), \quad Im(F) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una generica matrice di $Im(F)$ è del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ -2a+b & -5a+2b \end{pmatrix}$. Imponendo la condizione di simmmetria otteniamo $a = 0$, dunque una base dello spazio intersezione può essere $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Risulta

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) - \frac{1}{2}f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Similmente $f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, pertanto $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Il poliomio caratteristico è $t^2(t-1)^2$ e gli autovalori sono $0,1$, aventi entrambi molteplicità algebrica 2. Poichè $m_g(1)=1<2$ l'applicazione non è diagonalizzabile. Infine un complementare di $Ker(f)$ in $\mathbb{R}^4$ è il sottospazio generato dai vettori $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.