Proff. P. Papi - R. Procesi Ciampi
Algebra Informatica e Tecnologie Informatiche - 6-07-2004 - soluzioni

1. (a) Osserviamo innanzitutto che, se $L_a(g) = ag = ag' = L_a(g')$, moltiplicando per $a^{-1}$ si ottiene $g = g'$ onde $L_a$ è iniettiva; si verifica facilmente poi che $L_a$ è suriettiva infatti, $\forall\ g \in G$, risulta $g = L_a(a^{-1}g)$. L'applicazione $L_a$ non è un omomorfismo perché $L_a(u) = a \neq u$.

   (b) Ricordando che l'ordine di una permutazione è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli disgiunti che la compongono si vede immediatamente che si ottiene un elemento di ordine massimo per la decomposizione $(3, 5)$ che corrisponde ad una permutazione di ordine 15.

   (c) Poiché due permutazioni sono coniugate se, e solo se, hanno la stessa struttura ciclica, per quanto ricordato al punto precedente esse hanno lo stesso ordine. Osserviamo che il viceversa non è vero in generale.

2. Risulta:

$$\mathbb{U}_{25} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}\}$$

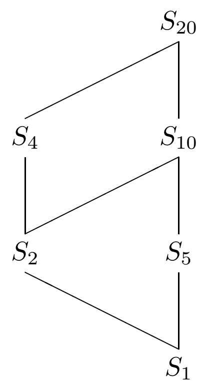
e

$$\mathbb{U}_{25} =< \overline{2} >= \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{24}, \overline{23}, \overline{21}, \overline{17}, \overline{9}, \overline{18}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{19}, \overline{13}, \overline{1}\}$$

onde il gruppo è ciclico; per quanto noto sui gruppi ciclici esso possiede un unico sottogruppo $S_k$, di ordine $k$, per ogni $k$ che divide $20 = \varphi(25)$. Tali sottogruppi, ovviamente normali, sono:

$$S_1 = \{\overline{1}\},\ S_2 =< \overline{24} >,\ S_4 =< \overline{7} >,\ S_5 =< \overline{16} >,\ S_{10} =< \overline{4} >,\ S_{20} =< \overline{2} > .$$

Osserviamo inoltre che il loro reticolo è isomorfo a quello dei divisori positivi di 20.



3. Osserviamo innanzitutto che le basi naturali dei due spazi sono:
$$B_V = \{1, t, t^2, t^3\} \quad \text{e } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
onde
$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) =$$
$$= (a_0 + a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a_0 + a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (a_0 + a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
pertanto

   (a) la matrice associata, rispetto alle basi canoniche, alla trasformazione $F$ è:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   onde $ImF =< \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} >$; per quanto riguarda il nucleo, che deve avere dimensione 3, esso è determinato dalla condizione
$$a_0 + a_1 + a_2 = 0$$
   e quindi una sua base è formata dai vettori:
$$1 - t^2, t - t^2, t^3.$$

   (b) Risulta:
$$F(1 + t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   e pertanto le coordinate di $F(1+t)$ nella base assegnata sono $(2, 0, 0)$

4. Per studiare la diagonalizzabilità della matrice $A$ calcoliamone il polinomio caratteristico; risulta:
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 3 & -1 \\ 0 & 6 - \lambda & -1 \\ 0 & 4 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 4)^3$$
e pertanto la trasformazione associata ad $A$ ha tre autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$; questo implica immediatamente che la risposta al punto (b) è negativa.

   Calcoliamo ora gli autovettori relativi all'autovalore multiplo 4; dobbiamo risolvere il sistema:
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
che ha come soluzione generale il vettore $(k, 0, 0)$, $\forall\ k \in \mathbb{R}$.

   Pertanto la matrice non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità geometrica uno e molteplicità algebrica tre.