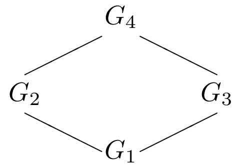
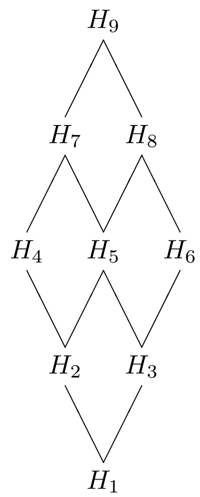
Soluzioni della prova di Algebra, 3/6/04

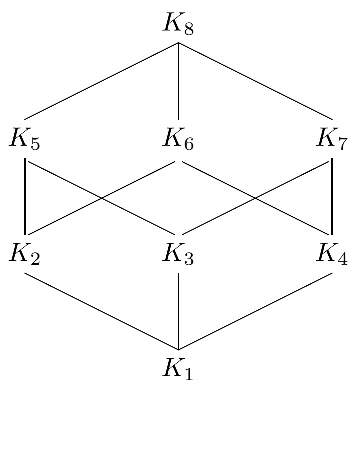
Esercizio 1 (a) Ricordiamo che i sottogruppi di un gruppo ciclico sono ciclici e che un gruppo ciclico ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine. Se $G = \mathbb{Z}_{143}$, si ha $|G| = 11 \cdot 13$, dunque i sottogruppi sono $G_1 = \{\overline{0}\}$, $G_2 = \langle\overline{11}\rangle, G_3 = \langle\overline{13}\rangle$, $G_4 = G$.

Se $H = \mathbb{Z}_{36}$, si ha $|H| = 2^2 \cdot 3^2$ e si hanno i sottogruppi $H_1 = \{\overline{0}\}$, $H_2 = \langle\overline{18}\rangle, H_3 = \langle\overline{12}\rangle$, $H_4 = \langle\overline{9}\rangle$, $H_5 = \langle\overline{6}\rangle$, $H_6 = \langle\overline{4}\rangle$, $H_7 = \langle\overline{3}\rangle$, $H_8 = \langle\overline{2}\rangle$, $H_9 = H$ di ordini rispettivi 1,2,3,4,6,9,12,18,36. Infine, se $K = \mathbb{Z}_{30}$, risulta $|K| = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e si hanno i sottogruppi $K_1 = \{\overline{0}\}$, $K_2 = \langle\overline{15}\rangle, K_3 = \langle\overline{10}\rangle$, $K_4 = \langle\overline{6}\rangle$, $K_5 = \langle\overline{5}\rangle$, $K_6 = \langle\overline{3}\rangle$, $K_7 = \langle\overline{2}\rangle$, $K_8 = K$ di ordini rispettivi 1,2,3,5,6,10,15,30.

(b) I diagrammi richiesti sono i seguenti.







(c) Bosogna provare che se $n \equiv n' \; mod \; 6$ allora $6n \equiv 6n' \; mod \; 9$. Infatti se $n \equiv n' \; mod \; 6$ allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $n - n' = 6k$. Pertanto $6n - 6n' = 36k$, quindi $6n \equiv 6n' \; mod \; 9$. E' chiaro che f è un omomorfismo di gruppi.

Esercizio 2 Risulta

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Detti $g_1, \dots, g_6$ gli elementi precedentemente elencati, la seguente matrice fornisce la tabella moltiplicativa di G: se k si trova al posto (i, j) allora $g_i \cdot g_j = g_k$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dalla tabella si ottiene subito che G è un gruppo non abeliano in cui g_2, g_3, g_4 hanno ordine 2 e g_5, g_6 hanno ordine 3. I sottogruppi sono $H_1 = \{g_1, g_2\}, H_2 = \{g_1, g_3\}, H_3 = \{g_1, g_4\}$, $H_4 = \{g_1, g_5, g_6\}$ oltre a $\{g_1\}$ e a G stesso. Non ci possono essere altro sottogruppi perchè dal teorema di Lagrange gli ordini possibili per i sottogruppi non banali sono 2 e 3. Ma ogni sottogruppo di ordine 2 o 3 è ciclico, quindi coincide con uno di quelli precedentemente elencati.

Per quanto riguarda la partizione in classi laterali si ha

$$G = H_1 \cup H_1 g_3 \cup H_1 g_4 = \{g_1, g_2\} \cup \{g_3, g_5\} \cup \{g_4, g_6\}$$

$$G = H_1 \cup g_3 H_1 \cup g_4 H_1 = \{g_1, g_2\} \cup \{g_3, g_6\} \cup \{g_4, g_5\}$$

I casi di H_2, H_3 sono simili. Infine, osserviamo che H_4 è normale (ha indice 2), quindi i laterali destri coincidono con quelli sinistri:

$$G = H_4 \cup g_2 H_4 = \{g_1, g_5, g_6\} \cup \{g_2, g_3, g_4\}.$$

Esercizio 3 (a) Risulta $\det(A) = 3\alpha + 2\alpha^2$. Pertanto se $\alpha \notin \{0, -\frac{3}{2}\}$, L_A è un isomorfismo, dunque $Ker\, L_A = \{0\}$ e $Im\, L_A = \mathbb{R}^3$. Se $\alpha = 0$ si ha $Ker\, L_A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Im\, L_A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se $\alpha = -\frac{3}{2}$ si ha $Ker\, L_A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Im\, L_A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b), (c) Gli autovalori di A sono $\alpha, 2 \pm \sqrt{1 - 2\alpha}$. Se $\alpha = \frac{1}{2}$. l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, dunque L_A non è diagonalizzabile. Se $\alpha = -4$ gli autovalori sono $-4, -1, 5$, dunque sono reali e distinti, quindi L_A è diagonalizzabile.

(d) Anzitutto affinchè gli autovalori siano reali deve essere $\alpha \leq \frac{1}{2}$. I casi che richiedono un'analisi particolare sono quelli in cui gl autovalori coincidono. L'unico caso in cui ciò può avvenire è $\alpha = \frac{1}{2}$, ed allora abbiamo già visto che L_A non è diagonalizzabile. Se invece $\alpha < \frac{1}{2}$ gli autovalori sono distinti e L_A è diagonalizzabile.

Esercizio 4 (a) Una base per U può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Si vuole un isomorfismo $\varphi : U \to V$ ov

$$V = \left\{ A \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid A = A^t,\, Tr(A) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base di V è data, ad esempio, dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Possiamo definire un'applicazione $\varphi : U \to V$ estendendo per linearità le condizioni

$$\varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè φ manda una base in una base, è un isomorfismo. Esplicitamente

$$\varphi(\begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ b \\ a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$