Esercizio 1. Sia r la retta di equazione cartesiana

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

e sia $P = (-1, 1, 0)$. Calcolare l'equazione cartesiana del piano α perpendicolare alla retta r e passante per P e l'equazione del piano β passante per r e per P.

Calcolare l'equazione cartesiana della retta passante per P e ortogonale e incidente a r

La retta r ha equazione vettoriale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, quindi i piani ortogonali ad r hanno equazione cartesiana $-x + 5y + 3z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P si trova $d = -6$, pertanto α ha equazione $-x + 5y + 3z - 6 = 0$. Il piano β è il piano del fascio di asse r passante per P; risulta $\beta: -3y + 5z + 3 = 0$.

La retta cercata è $= \alpha \cap \beta$, si ha

$$s: \begin{cases} -x + 5y + 3z - 6 = 0 \\ -3y + 5z + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3 + x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4).$$

Determinare basi per nucleo e immagine di T. Dire se T è invertibile.

La matrice A di T rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ prese rispettivamente come basi di partenza e arrivo è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Una base per $\ker T$ si ottiene risolvendo il sistema $AX = 0$. Una possibile scelta è

$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Dal teorema del rango sappiamo che $rg(T) = 2$, pertanto due colonne indipendenti di A sono una base per $\mathrm{Im}\, T$. Si possono scegliere le prime due colonne: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Se T fosse invertibile sarebbe un isomorfismo tra spazi di dimensioni diverse, il che è impossibile.

Esercizio 3. Siano U_k e W_k i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane

$$U_k : \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-k)x_3 + x_4 = 0 \\ (k+2)x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}, W_k : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ (k+3)x_1 + 3x_2 + (2-k)x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare al variare del parametro reale k la dimensione di $U_k, W_k, U_k \cap W_k$. Determinare i valori di k per cui $\mathbb{R}^4 = W_k \oplus U_k$.

Consideriamo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-k & 1 \\ k+2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ k+3 & 3 & 2-k & -1 \end{pmatrix}$$

dei sistemi che definiscono U_k, W_k. Entrambe hanno rango 2 per ogni k (il minore $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2-k & -1 \end{vmatrix}$ è non zero nella seconda matrice; il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2-k \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ è non nullo se $k \neq 2$; e per $k=2$ è non nullo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k+2 & 2 \end{vmatrix}$ nella prima matrice). Pertanto per ogni k $\dim U_k = \dim W_k = 4-2 = 2$. Per quanto riguarda $U_k \cap W_k$ occorre studiare il sistema formato dalle quattro equazioni. Il suo determinante è $2(k^2-5k+4)$ che si annulla per $k \in \{1,4\}$. Dunque per $k \notin \{1,4\}$ risulta $U_k \cap W_k = \{0\}$ e $\mathbb{R}^4 = U_k \cap W_k$

Per $k=1$ o $k=4$ il rango della matrice del sistema è 3 dunque $\dim U_1 \cap W_1 = \dim U_4 \cap W_4 = 1$.

Chiaramente in tali casi la somma non è diretta

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_A(X) = AX$, ove $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Dire se L_A è diagonalizzabile e in tal caso calcolare una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

Il polinomio caratteristico di A è $-t^3+6t^2-32$, che ha radici $4, -2$ con molteplicità algebriche $2, 1$ rispettivamente. Risulta

$$V_4 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto $m_g(4) = 2$, L_A è diagonalizzabile

e $N = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale V delle matrici reali 2×2 si consideri la forma bilineare simmetrica $g(A,B)=trA^tCB$, ove $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. Determinare una base di $ker(g)$ e gli indici di g.

Risulta

$$\begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1+a_3)(b_1+b_3)&(a_1+a_3)(b_2+b_4)\\(b_1+b_3)(a_2+a_4)&(a_2+a_4)(b_2+b_4)\end{pmatrix}$$

Pertanto

$$g\left(\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}\right)=(a_1+a_3)(b_1+b_3)+(a_2+a_4)(b_2+b_4)$$

La matrice di g rispetto alla base $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ di V è pertanto

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\ker g=\left\{X=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}\ \middle|\ M\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$ pertanto

$$\ker g=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di M sono $0, 2$ con molteplicità 2, pertanto

$i_0(g)=2$

$i_+(g)=2$

$i_-(g)=0$