Soluzioni della prova di Matematica II del 27-5-2002

Esercizio 1. (a). Una base per U si ottiene considerando le righe non nulle di una forma a gradini della matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Una base può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Una base di W si ottiene risolvendo il sistema che definisce W. Una base può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b). La condizione $rg \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = 2$ si traduce nel sistema lineare $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$; pertanto si vede facilmente che equazioni per W sono $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

(c). Dal punto precedente è semplice dedurre che una base per $U \cap W$ è data dal vettore $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; dalla formula di Grassmann si ha che $dim(U + V) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$.

(d). Occorre trovare vettori $v_2, v_3.v_4 \in \mathbb{R}^4$ tali che $v_i \notin \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle,\ i = 2, 3, 4$. Esaminando la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ si deduce che il completamento richiesto può essere effettuato tramite i vettori e_1, e_3, e_4 della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Considerata la base $\mathcal{B} = \{v_1, e_1, e_3, e_4\}$ si ha $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1 + e_1 + e_4$, pertanto le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ del vettore in esame sono $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 2 (a). Fissata in V la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, si ha $A \equiv {}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Coordinate di una base di $Ker(F)$ rispetto a $\mathcal{B}$ si ottengono risolvendo il sistema omogeneo associato ad A, mentre coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di una base di $Im(F)$ si ottengono considerando le righe non nulle di una forma a gradini di A^t. Si ha

$$Ker(F) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Im(F) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Il polinomio caratteristico di F è $t^3(t-2)$ pertanto gli autovalori sono $0, 2$ con molteplicità algebrica tre ed uno rispettivamente. Ricordando che il nucleo di F è l'autospazio relativo all'autovalore 0, dalla parte (a) deduciamo che la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è due. Essendo tale molteplicità strettamente minore della corrispondente molteplicità algebrica deduciamo che F non è diagonalizzabile.
(c) Dal teorema di estensione per linearità G è univocamente determinata dai valori assunti su una base del dominio (che è $Ker(F)$). Siccome si vuole che G sia un isomorfismo, imponiamo che le immagini tramite G di una base di $Ker(F)$ siano una base di $\mathbb{R}_1[t]$:

$$G(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = t.$$

Si ottiene quindi

$$G(\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}) = x + yt.$$

In particolare $G(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}) = 1 + t.$

Esercizio 3 Si vedano i testi consigliati.