Soluzioni della prova di Algebra, Settembre 2004

Esercizio 1 a) Risulta:

$$\mathbb{U}_{15} = \{\overline{1},\, \overline{2},\, \overline{4},\, \overline{7},\, \overline{8},\, \overline{11},\, \overline{13},\, \overline{14}\}.$$

I suoi sottogruppi ciclici propri sono: $\langle\overline{2}\rangle = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}\} = \langle\overline{8}\rangle$, $\langle\overline{4}\rangle = \{\overline{1}, \overline{4}\}$, $\langle\overline{7}\rangle = \{\overline{1}, \overline{7}, \overline{4}, \overline{13}\} = \langle\overline{13}\rangle$, $\langle\overline{11}\rangle = \{\overline{1}, \overline{11}\}$, $\langle\overline{14}\rangle = \{\overline{1}, \overline{14}\}$. Inoltre, essendo $\overline{11}\cdot\overline{4} = \overline{14}$, il gruppo $\mathbb{U}_{15}$ ammette il sottogruppo (non ciclico e quindi) di Klein $\boldsymbol{K} = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$.
b) I tre quozienti sono

$$\mathbb{U}_{15}/_{\langle\overline{4}\rangle} = \{\langle\overline{4}\rangle = \{\overline{1}, \overline{4}\}, \overline{2}\langle\overline{4}\rangle = \{\overline{2}, \overline{8}\}, \overline{7}\langle\overline{4}\rangle = \{\overline{7}, \overline{13}\}, \overline{11}\langle\overline{4}\rangle = \{\overline{11}, \overline{14}\}\}$$
$$\mathbb{U}_{15}/_{\langle\overline{11}\rangle} = \{\langle\overline{11}\rangle, \overline{2}\langle\overline{11}\rangle, \overline{4}\langle\overline{11}\rangle, \overline{8}\langle\overline{11}\rangle\}$$
$$\mathbb{U}_{15}/_{\langle\overline{14}\rangle} = \{\langle\overline{14}\rangle, \overline{2}\langle\overline{14}\rangle, \overline{4}\langle\overline{14}\rangle, \overline{8}\langle\overline{14}\rangle\}$$

Il primo è un gruppo di Klein [in quanto ha tre elementi di periodo 2]; gli altri due sono ciclici, generati ad esempio dalla classe di $\overline{2}$.

Un isomorfismo $f : U_{15}/_{\langle\overline{11}\rangle} \to U_{15}/_{\langle\overline{14}\rangle}$ è quindi il seguente:

$$\begin{aligned}
\langle\overline{11}\rangle &\to \langle\overline{14}\rangle\\
\overline{2}\langle\overline{11}\rangle &\to \overline{2}\langle\overline{14}\rangle\\
\overline{4}\langle\overline{11}\rangle &\to \overline{4}\langle\overline{14}\rangle\\
\overline{8}\langle\overline{11}\rangle &\to \overline{8}\langle\overline{14}\rangle
\end{aligned}$$

Esercizio 2 a) È chiaro che il prodotto di due matrici a coefficienti interi ha ancora coefficienti interi. Inoltre, dal teorema di Binet, se $\det(A) = \det(B) = 1$ allora $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$. Resta da verificare che l'inversa di una matrice di G appartiene ancora a G. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, quindi l'inversa di A è ancora una matrice a coefficienti interi (e determinante 1).
b) Risulta

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\overline{aa' + bc'} = \overline{a}\cdot\overline{a}' + \overline{b}\cdot\overline{c}' = \overline{1}\cdot\overline{1} + \overline{0}\cdot\overline{0} = \overline{1}$$
$$\overline{ab' + bd'} = \overline{a}\cdot\overline{b}' + \overline{b}\cdot\overline{d}' = \overline{1}\cdot\overline{0} + \overline{0}\cdot\overline{1} = \overline{0}$$

Similmente $\overline{a'c + c'd} = \overline{0}$, $\overline{b'c + dd'} = \overline{1}$. Dall'espressione esplicita dell'inversa di una matrice di G si deduce immediatamente che $A \in \Gamma_n \implies A^{-1} \in \Gamma_n$.

Esercizio 3 a) Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che esprime le coordinate dei p_i rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ di V è 3, dunque $\dim(W) = 3$. La sottomatrice ottenuta eliminando la seconda riga ha anch'essa rango 3, dunque possiamo porre $B = \{p_1, p_3, p_4\}$.

b) Si verifica facilmente che i vettori t^3, t^4 non appartengono a W, dunque completano B a una base di V.
c) La matrice di F rispetto alle basi B in partenza e alla base standard di $\mathbb{R}^4$ in arrivo è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dobbiamo dunque risolvere il sistema non omogeneo la cui matrice completa è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Tale sistema risulta incompatibile, dunque $F^{-1}(e_2 + e_3) = \emptyset$.
Esercizio 4 La richiesta del testo equivale a vedere se l'operatore $L_A(X) = AX$ è diagonalizzabile, e, in caso affermativo, trovare la matrice del cambiamento di base dalla base standard a una base di autovettori per L_A. Il polinomio caratteristico di A è $(t-1)^2(t-2)^2$, pertanto glli autovalori sono $1, 2$ entrambi con molteplicità algberica 2. Basi per gli autospazi relativi a $1, 2$ sono $\{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$, $\{(0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0)\}$ rispettivamente. In particolare L_A è diagonalizzabile e la matrice cercata è

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$