SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 4–9–2001

Esercizio 1. Un modo rapido di risolvere l'esercizio è il seguente: dalla definizione di nucleo segue subito che $Ker(F)$ è il sottospazio delle matrici simmetriche S, mentre si verifica che $X - X^t$ è antisimmetrica, pertanto $Im(F)$ è contenuto nel sottospazio W delle matrici antisimmetriche. Poichè $dim(W) = 1$, si ha $Im(F) = W$. Basi per S, W possono essere

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

rispettivamente.

Ricordando che il nucleo è l'autospazio di autovalore 0, possiamo dedurre che 0 ha molteplicità geometrica tre. Se ora X è una matrice antisimmetrica, si ha

$$F(X) = X - X^t = X - (-X) = 2X$$

pertanto 2 è autovalore di molteplicità geometrica uno. Deduciamo che F è diagonalizzabile.

L'esercizio poteva essere anche svolto determinando la matrice di F rispetto a una base di V. Se tale base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, la matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora coordinate di una base del nucleo si trovano risolvendo il sistema omogeneo associato ad A mentre coordinate di una base dell'immagine si ottengono considerando le righe non nulle di una forma a gradini di A^t.

Esercizio 2 (a). Risulta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ ove π_1 è il piano passante per la retta ed il punto assegnati (siano s, P rispettivamente) e π_2 è il piano per P ortogonale ad s. Si ha $r : \begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

(b) r_0 ha direzione $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; poichè $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ (sia $\mathcal{B}$), le condizioni assegnate definiscono univocamente F. La matrice di F rispetto a $\mathcal{B}$ come base di partenza e alla base standard come base di arrivo è $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Utilizzando le formule per il cambiamento di base si ottiene quanto si voleva.

(c) Dalla relazione $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ deduciamo che 4 è autovalore per A ma non per matrice assegnata dal testo. Pertanto A non è simile alla matrice assegnata.

Esercizio 3. Si vedano i testi consigliati.

Esercizio 4. Osserviamo che, per ogni $X \in \mathbb{R}^n$

$$T_{A,b} \circ T_{C,d}(X) = T_{A,b}(CX+d) = A(CX+d)+b = ACX+Ad+b = T_{AC,Ad+b}(X).$$

Pertanto $T_{A,b} \circ T_{C,d} = T_{AC,Ad+b}$. Dato che AC è invertibile, essendo prodotto di due matrici invertibili, G è chiuso rispetto alla composizione di applicazioni. Dal momento che quest'ultima operazione è associativa, dobbiamo mostrare soltanto l'esistenza dell'elemento neutro e dell'inverso di ogni elemento. Dalla relazione $T_{A,b} \circ T_{C,d} = T_{A,b}\ \forall, A,\ b$ deduciamo che l'elemento neutro è $T_{I,0}$ ove I è la matrice identità e 0 il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$. Dalla relazione $T_{A,b} \circ T_{C,d} = T_{I,0}$ deduciamo che l'inverso di $T_{A,b}$ è $T_{A^{-1},-A^{-1}b}$.

Se $T_{A,b}$ è un'applicazione lineare, allora $T_{A,b}(0) = 0$, pertanto $b = 0$. Viceversa $T_{A,0}$ è un'applicazione lineare. Pertanto le appliazioni lineari in G sono tutte e sole le $T_{A,0}$. Queste formano un sottogruppo isomorfo a $GL(n)$; poichè $GL(n)$ è infinito e non abeliano, tale è G. Per quanto rigurda il punto (c), $T_{A,0}$ ha ordine 2, perchè $A \neq I,\ A^2 = I$.