Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Sia considerino i punti $A \equiv (0,1,1)$, $B \equiv (1,-1,0), C \equiv (1,0,1)$.
a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C.
b) Determinare il punto D, quarto vertice del parallelogramma P ~~individuato da A, B, C.~~ di lati AB, AC.
c) Determinare l'area di P e la distanza di D dall'origine.

a) $\pi: \begin{vmatrix} x_1 & x_2-1 & x_3-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

b) $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} = (1,-2,-1) + (1,-1,0) = (2,-3,-1)$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = (0,1,1) + (2,-3,-1) = (2,-2,0)$

c) $\text{Area}(P) = |\,\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|\,| = |\,\|(-1,-1,1)\|\,| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$d(D,0) = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\underset{\|\vec{OD}\|}{\shortparallel}$

Esercizio 2. Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
a) Determinare la matrice rispetto alla base standard dell'operatore $T \in End(\mathbb{R}^3)$ per cui $T(w) = w \, \forall w \in W$ e $T((1,1,1)) = (1,2,3)$.
b) Determinare la matrice rispetto alla base standard dell'operatore $S \in End(\mathbb{R}^3)$ per cui $S((1,1,1)) = (1,2,3)$, W è un autospazio di S e S non è diagonalizzabile.

a) $W = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Poiché $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix} = -1 \neq 0$ i tre vettori $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ e T è individuato dalle condizioni $T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Poiché $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

risulta

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

Dunque la matrice cercata è $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}$

Detti $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,1,1)$

S è dunque definita da

$$S(v_1) = \lambda v_1, \quad S(v_2) = \lambda v_2, \quad S(v_3) = (1,2,3)$$

Poiché $(1,2,3) = v_1 + 2v_2$, la matrice di S nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $\lambda \neq 0$ S è diagonalizzabile, perché λ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Allora $\lambda = 0$ e in tal caso S non è diagonalizzabile, perché $m_g(0) = 2$ mentre $m_a(0) = 3$

In definitiva la matrice di S è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base standard è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. a) Determinare le possibili forme di Jordan di una matrice il cui polinomio caratteristico è $(t-2)^2(t-3)^3$.
b) Una matrice quadrata A si dice nilpotente se $A^k = 0$ per qualche k. Dimostrare che se A è nilpotente allora 0 è l'unico autovalore di A. Dire, giustificando la risposta, se le matrici nilpotenti $n \times n$ formano un sottospazio vettoriale delle matrici $n \times n$.

a) Se $p(n)$ è il numero di partizioni di n, le possibili forme di Jordan sono $p(2)\,p(3) = 2 \cdot 3 = 6$ precisamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ \hline & & 3 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ \hline & & 3 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ \hline & & 3 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ \hline & & 3 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ \hline & & 3 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

b) Se $Av = \lambda v$ allora una semplice induzione su k dice che $A^k v = \lambda^k v$. Se $A^k = 0$ allora $0 = A^k v = \lambda^k v$ implica $\lambda^k = 0$ (v è un autovettore quindi $v \neq 0$). Ma allora $\lambda = 0$.

Le matrici e_{12}, e_{21} sono nilpotenti, ma le

Ora somma $e_{12}+e_{21}$ è simmetrica, ~~dun~~ reale

dunque è diagonalizzabile. Se fosse nilpotente

avrebbe tutti gli autovalori zero, quindi

esisterebbe N invertibile tale che

$$N(e_{12}+e_{21})N^{-1}=0$$

Ma allora $e_{12}+e_{21}=0$, assurdo.

Esercizio 4. Determinare la compatibilità e il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni del sistema lineare la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 & h \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}$.

L'unico minore 3×3 della matrice dei coefficienti A che non è identicamente nullo è $k^2(k^2+1)$.

Dunque se $k \neq 0$, $k \neq \pm i$, $rk(A) = 3$ è massimo e il sistema ha ∞^1 soluzioni per ogni h.

Se $k = 0$ il sistema si riduce a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha ∞^2 soluzioni per ogni h.

Se $k = i$ il sistema si riduce a $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$

che è incompatibile se $h \neq 0$ e compatibile con ∞^2 soluzioni per ~~ogni altro valore~~ di $h = 0$

Se $k = -i$ il sistema si riduce a $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h/i \end{pmatrix}$

che ha ∞^2 soluzioni per ogni h

Esercizio 5. Si considerino le matrici simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Dire, giustificando la risposta, se sono congruenti.
2. Determinare se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ per la forma bilineare simmetrica $g(X,Y) = XAY^t$.
3. Determinare se esiste, una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per la forma bilineare simmetrica $\cancel{g}h(X,Y) = XBY^t$.

1. La matrice A ha autovalori $1 \pm \sqrt{5}$, 1, pertanto $i_+(g) = 2$, $i_-(g) = 1$, $i_0(g) = 0$. Poiché chiaramente $\det B = 0$, si ha $i_0(h) > 0$ e A, B non sono congruenti.

2. Poiché g non è definita positiva, non esiste una base g-ortonormale.

3. Dal teorema spettrale segue che una base di autovettori per B è anche una base h-ortogonale.
Una scelta può essere $(0,1,1)$, $(0,-1,1)$, $(1,0,0)$