Esercizio 1 (a) Determinare l'inverso moltiplicativo di $\overline{37}$ in $\mathbb{Z}_{42}$. Determinare poi il numero deigli elementi (moltiplicativamente) invertibili e dei divisori di zero in $\mathbb{Z}_{42}$.

(b) Determinare il reticolo dei sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{30}, +)$. Scrivere le classi laterali del sottogruppo di ordine massimo.

a) Risulta $42 = 37 \cdot 1 + 5$, $37 = 5 \cdot 7 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$

per cui l'identità di Bézout può essere

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (37 - 5 \cdot 7) \cdot 2 = 5 \cdot 15 - 37 \cdot 2 =$$

$$= (42 - 37) \cdot 15 - 37 \cdot 2 = 42 \cdot 15 - 37 \cdot 17$$

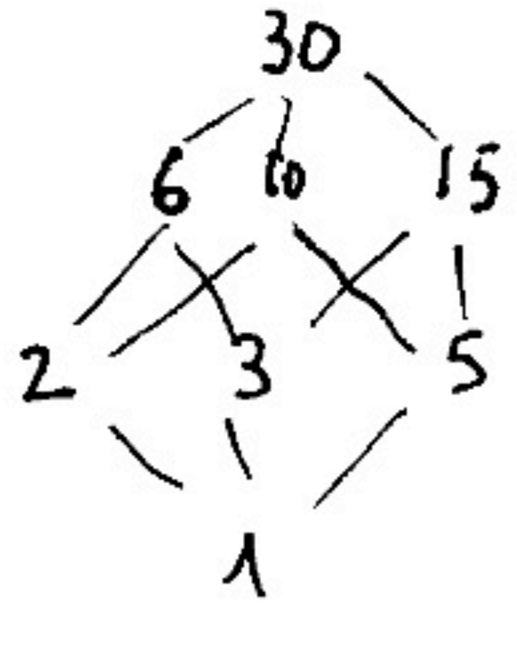
e l'inverso di $\overline{37}$ è $\overline{-17} = \overline{25}$

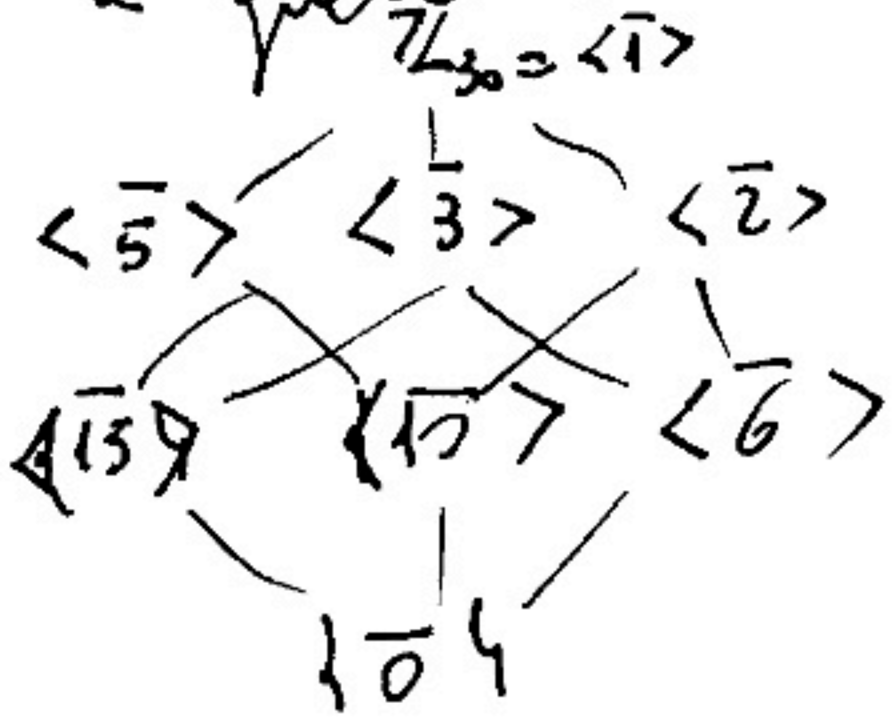
Gli elementi invertibili sono in numero di $\varphi(42) =$

$$= \varphi(2 \cdot 3 \cdot 7) = \varphi(2)\varphi(3)\varphi(7) = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$$

I divisori di zero sono dunque $42 - 12 = 30$ (comprendendo 0).

b) Il reticolo è isomorfo a quello dei divisori di 30:





Il sottogruppo di ordine massimo è $H = \langle \overline{2} \rangle$

e $G/H = \{[\overline{0}], [\overline{1}]\}$ ove $[\overline{0}] = \{\overline{2i} \mid 0 \le i \le 14\}$

$[\overline{1}] = \{\overline{2i+1} \mid 0 \le i \le 14\}$

Esercizio 2. (a) Dimostrare che $\mathbb{Z}$ dotato dell'operazione binaria

$$i \circ j = \begin{cases} i+j & \text{se } i \text{ è pari} \\ i-j & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

è un gruppo non abeliano.

(b) Determinare due permutazioni $\sigma_1, \sigma_2 \in S_8$ tali che:

(1) σ_1 è pari e $o(\sigma_1)$ è massimo.
(2) σ_2 è dispari e $o(\sigma_2)$ è massimo.

Calcolare infine $o(\sigma_1\sigma_2)$.

a) Si vede che 0 è elemento neutro e che l'inverso di i è $-i$ se i è pari e i se i è dispari. Si mostra inoltre che l'operazione non è commutativa: $2 \circ 3 = 5$, $3 \circ 2 = 1$. Resta da dimostrare l'associatività:

$$(i \circ j) \circ k = \begin{cases} (i+j) \circ k = \begin{cases} i+j+k & i \text{ pari}, j \text{ pari} \\ i+j-k & i \text{ pari}, j \text{ dispari} \end{cases} \\ (i-j) \circ k = \begin{cases} i-j+k & i \text{ dispari}, j \text{ dispari} \\ i-j-k & i \text{ dispari}, j \text{ pari} \end{cases} \end{cases}$$

$$i \circ (j \circ k) = \begin{cases} i \circ (j+k) = \begin{cases} i+j+k & j \text{ pari}, i \text{ pari} \\ i-j-k & j \text{ pari}, i \text{ dispari} \end{cases} \\ i \circ (j-k) = \begin{cases} i+j-k & j \text{ dispari}, i \text{ pari} \\ i-j+k & j \text{ dispari}, i \text{ dispari} \end{cases} \end{cases}$$

b) Listando le partizioni di 8 si osserva che l'ordine massimo è 15, corrispondente alla partizione (5,3) che dà luogo a una permutazione pari, ad esempio $\sigma_1 = (1,2,3,4,5)(6,7,8)$. L'ordine più alto dopo 15 è 12, corrispondente alla partizione (4,3,1). Allora, ad esempio, $\sigma_2 = (1,2,3,4)(5,6,7)$ e in tal caso $\sigma_1\sigma_2 = (1,3,5,7)(2,4)(6,8)$ e $o(\sigma_1\sigma_2) = 4$

Esercizio 3. Sia $U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Determinare $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

(c) Scrivere la matrice rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$ dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(u + w) = u - w$, $u \in U, w \in W$.

a) Sia A la matrice del sistema che definisce U; allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ da cui}$$

$$U = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Poiché

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

posto $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ risulta $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

c) Sia $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

B è una base di $\mathbb{R}^4$ e la matrice di f rispetto a B presa come base di partenza e arrivo è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è allora $N^{-1}AN$ ove $N = {}_B[id]_\ell$ (ℓ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$).

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$N^{-1}AN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} k(x_1 + x_3) \\ x_2 \\ k(x_1 + x_3) \end{pmatrix}.$$

(k è un parametro reale).

(a) Trovare la matrice di F rispetto alla base standard presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

(b) Studiare la diagonalizzabilità di F al variare di k.

a) La matrice richiesta è $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$

b) Il polinomio caratteristico è $t(t-1)(t-2k)$ dunque gli autovalori sono 0, 1, 2k.

Se $k \notin \{0, \frac{1}{2}\}$ gli autovalori sono distinti, dunque F è diagonalizzabile. Per $k=0$ risulta $m_g(0)=2$ mentre per $k=\frac{1}{2}$ risulta $m_g(1)=2$ dunque F è diagonalizzabile per ogni valore di k