SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (30–1–2001)

Esercizio 1 (a). Equazioni vettoriali per r, s, sono date da:

$$r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad s: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poichè i vettori $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, r, s sono sghembe.
(b). La retta cercata è l'intersezione del piano π_1 parallelo a q passante per r e del piano π_2 parallelo a q passante per s; equazioni vettoriali di tali piani si ottengono facilmente tenendo conto che la direzione di q è individuata dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\pi_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Passando a equazioni cartesiane si ottiene $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Esercizio 2 (a) Una base di U è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; per quanto riguarda W, si nota che il terzo generatore è combinazione lineare dei primi due, che sono indipendenti e dunque formano una base. (b) Una base di $U + W$ si ottiene determinando un insieme indipendente massimale di $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Un tale insieme può essere costituito dai primi tre vettori. Poichè $dim(U + W) = 3$, dalla formula di Grassmann si ha che $dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Esercizio 3 La matrice A di F rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ presa come base di partenza e di arrivo in V è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare associato si ottiene immediatamente che $Ker(F)$ è costituito dai polinomi costanti; una possibile base è composta dal polinomio 1.

Il polinomio caratteristico di A è t^3, pertanto l'unico autovalore è 0 con molteplicità algebrica 3. L'autospazio relativo, che è il nucleo di F, ha dimensione uno, pertanto $1 = m_g(0) < m_a(0) = 3$ e F non è diagonalizzabile.

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 La matrice A di g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono 0 con molteplicità due e -6 con molteplicità uno. Pertanto $i_+(g) = 0, i_-(g) = 1, i_0(g) = 2$. Poichè A è la matrice di g rispetto alla base canonica, $Ker(g)$ si determina direttamente risolvendo il sistema lineare $AX = 0$; una sua base può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.