SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA
DI GEOMETRIA (20–2–2001)

Esercizio 1 (a). La retta t può trovarsi come $t = \pi_1 \cap \pi_2$ ove π_1 è il piano contenente s e passante per P, mentre π_2 è il piano ortogonale ad r e passante per P. π_1 si determina come il piano del fascio di asse r passante per P: una sua equazione cartesiana è $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$. π_2 è il piano avente per vettore normale un vettore di direzione per r (ad esempio $(1, 2, 1)$) e passante per P: una sua equazione cartesiana è $x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$. Pertanto

$$t : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0. \end{cases}$$

(b). La distanza cercata è la longhezza del segmento $\overline{OQ}$, ove Q è il punto di intesezione del piano per l'origine ortogonale a t (di equazione $x_1 - x_3 = 0$) con la retta t; risulta $Q = (1/2, 2, 1/2)$ e la distanza cercata è $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 2 (a) La matrice di f rispetto alla base canonica presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$Ker(f)$ si determina allora risolvendo il sistema $AX = 0$, mentre una base di $Im(f)$ è data dalle righe non nulle di una forma a gradini di A^t. Possibili basi sono $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ per $Ker(f)$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ per $Im(f)$.

(b). La matrice di cambiamento di base dalla base standard di $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{B}$ è $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice cercata è $N^{-1}AN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3 Il polinomio caratteristico di A è $(t+1)^3(t-1)$, pertanto gli autovalori sono $-1, 1$, di molteplicità algebrica e geometrica 3 ed 1, rispettivamente. Una base per l'autospazio relativo all'autovalore -1 è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, mentre una base per l'autospazio relativo all'autovalore 1 può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Tali basi sono basi ortogonali, pertanto normalizzando i vettori in esse contenuti si ottengono basi ortonormali dei due autospazi. Ricordando che per una matrice simmetrica autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali, l'unione delle due basi è una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A. La matrice cercata U è la matrice del cambiamento di base dalla base standard alla base $\mathcal{B}$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 (a). Una base di U può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Possiamo renderla ortonormale tramite il procedimento di Gram-Schmidt: si ottiene

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b). Se $\{u_1, u_2\}$ è una qualsiasi base di U, allora $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid (x, u_1) = (x, u_2) = 0\}$, ove $(\ , \ )$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^4$. Dunque equazioni per $U^\perp$ possono essere

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

e una base di $U^\perp$ può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c). La relazione $V = U \oplus U^\perp$ vale per un qualsiasi spazio vettoriale V dotato di una forma bilineare simmetrica definita positiva, pertanto è vera in particolare quando $V = \mathbb{R}^4$ e la forma è il prodotto scalare standard.