Soluzioni della prova di Matematica II del 28-4-2003

Esercizio 1. (a). Le rette r, s hanno equazioni vettoriali

$$r : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad s : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Equazioni cartesiane per r si ottengono eliminando t. Si ha $r : \begin{cases} x_1 + x_3 - 1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.
(b). Dal momento che i vettori direttori di r, s non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Si vede facilmente che il vettore $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori direttori delle due rette, che sono pertanto incidenti.
(c). Risulta $t : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Il piano π è il piano del fascio di asse r passante per C (o equivalentemente il piano per A, B, C). Esso ha equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0$.
(d). Dalla geometria del problema, la distanza tra r e t eguaglia la distanza tra C ed E ove $E = r \cap \alpha$, ove α è il piano ortogonale ad r passante per C. Tale piano ha equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0$; risulta quindi $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. La distanza cercata è $\sqrt{21}$.
(e) La retta cercata è intersezione di π con α, dunque ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 2. La matrice completa del sistema è $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & 1 & 19 \end{bmatrix}$.
La sua forma a gradini ridotta è $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pertanto le soluzioni sono

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$