Prova di Matematica primo corso del 22-11-2007

Gli esercizi 1 e 2 sono stati assegnati con dati iniziali diversi ma hanno tutti la stessa soluzione. Per l'esercizio 3 si rimanda ai testi consigliati.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale si fissi un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate sono x_1, x_2, x_3.

1. Si determinino equazioni vettoriali per la retta r passante per i punti $A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Si determinino equazioni cartesiane per il piano π contenente la retta r' di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ e parallelo al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Si studi la posizione reciproca di r e π.

4. Si studi la posizione reciproca di r e r'.

5. Si calcolino $d(r, \pi)$, $d(r, r')$, $d(r', \pi)$.

SOLUZIONE

1. La retta r ha equazioni vettoriali $\vec{OP} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$. In coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Per determinare un'equazione vettoriale di π occorrono un suo punto e due vettori di giacitura. Il punto e un vettore di giacitura sono forniti dalla retta r'. L'ulteriore vettore di giacitura è il vettore assegnato, cui π deve essere parallelo. Equazioni vettoriali per r' sono $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Passando a equazioni cartesiane si ottiene $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Poiché il vettore direttore $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ di r è ortogonale al vettore normale $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di π, concludiamo che r e π sono paralleli. Si può altresi' osservare che la direzione di r è contenuta nella giacitura di π.

4. r e r' sono parallele, dato che i loro vettori direttori sono proporzionali.
5. $d(r,\pi) = \frac{|2+2|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{4}{3}$. $d(r',\pi) = 0$ perché $r' \subset \pi$. $d(r,r')$ si può calcolare come $d(A,P)$ ove P è il punto di intersezione di r' col piano passante per A e ortogonale ad r. Tale piano ha equazione $x_1 - x_3 = 1$, mentre P ha coordinate $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, pertanto la distanza cercata è $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_3[t]$ dei polinomi di gradi minore o uguale a 3 si considerino il sottospazio U generato da $1+t^2, -1+t+t^2-t^3, t+2t^2-t^3$ e il sottospazio

$$W = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^2 \mid \begin{cases} a_0 - a_2 = 0 \\ 2a_0 - 2a_2 + a_1 - a_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Determinare basi per U e W.

2. Determinare basi per $U+W$ e $U \cap W$.

SOLUZIONE

1. Fissiamo una base B di V Coordinate rispetto a B per i vettori di una base di U si ottengono riducendo per righe la matrice che ha per righe le coordinate dei vettori assegnati e considerando le righe non nulle della matrice ottenuta. Coordinate rispetto a B per i vettori di una base di W si ottengono risolvendo il sistema che definisce W.
Risulta $U = \mathbb{R}(1+t^2) \oplus \mathbb{R}(t+2t^2-t^3)$, $W = \mathbb{R}(1+t^2) \oplus \mathbb{R}(t+t^3)$.
2. I vettori $1+t^2, t+2t^2-t^3, t+t^3$ generano $U+W$ e sono lineramente indipendenti, come si verifica facilemente. Pertanto $\dim(U+W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = 2+2-3 = 1$. Una base per $U \cap W$ è costituita dal polinomio $1+t^2$.