Traccia delle soluzioni della prova di Algebra del 15–1–2002

Esercizio 1 (a). Equazioni vettoriali per r possono essere $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da cui si deducono le equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. (b). I piani paralleli al piano dato hanno equazioni del tipo $x_2 - x_3 + d = 0$. Imponendo il passaggio per il punto assegnato si ottiene $\pi : x_2 - x_3 + 1 = 0$. (c) Il punto P si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + 1 = 0 \end{cases}$; si ha $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (d). I piani per P hanno equazioni cartesiane del tipo $a(x_1 - 1) + b(x_2 + 1) + cx_3 = 0$. Le rimanenti condizioni implicano le seguenti condizioni per i coefficienti a, b, c: $\begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$. In definitiva il piano cercato è $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Esercizio 2 (a). Osserviamo preliminarmente che $\dim(V) = 3$ e che $\dim(W_k) = 2$ per ogni k (infatti, per ogni valore di k, i due generatori di W_k non sono proporzionali. La dimensione di $V + W_k$ si calcola determinando il rango della matrice che ha per righe i generatori di V, W_k. Tale rango è tre per $k \neq -1$ ed è quattro altrimenti. Pertanto, dalla formula di Grassmann, deduciamo che $dim(U \cap W_{-1}) = 2$ e che $dim(U \cap W_k) = 1$ per $k \neq -1$. (b) Se $k = -1$, dal momento che $\dim(W_{-1}) = 2$, si ha che $W_{-1} \subset V$ e che quindi $V \cap W_{-1} = W_{-1}$, $V + W_{-1} = V$. Pertanto basi per tali spazi sono costituite dai vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.
Se invece $k \neq -1$, si ha $V + W_k = \mathbb{R}^4$ (dunque una base per il sottospazio somma è una qualsiasi base di $\mathbb{R}^4$, ad esempio la base standard), mentre una base per $V \cap W_k$ è costituta dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (è chiaro dalla definizione di V, W_k, che tale vettore appartiene ad entrambi i sottospazi: poichè $dim(U \cap W_{-1}) = 1$, esso costituisce una base).

Esercizio 3 (a). La generica matrice dello spazio in considerazione (sia W) è $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & k \\ d & g & k & -a-e-h \end{pmatrix}$. Da ciò non è difficile dedurre che una base di W è , in termini delle matrici elementari e_{ij}, la seguente: $\mathcal{B} = \{e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{e_{ii} \mid 1 \leq i \leq 3\}$. In particolare $\dim(W) = 9$. (b) Sia $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V$; allora $p \in U_k$ se e solo se $\begin{cases} a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 k + 3a_3 k^2 = k. \end{cases}$ Il precedente sistema è omogeneo se e solo se $k = 0$. Dunque solo per $k = 0$ U_k risulta essere un sottospazio; il precedente sistema diviene $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$, pertanto una base di U_0 può essere $\{t^2, t^3\}$.