**Soluzioni della prova di Matematica II del 11-6-2003**

**Esercizio 1.** (a). La retta $r$ ha equazioni vettoriali $r : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Dal momento che i tre vettori $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti (il determinante della matrice che ha tali vettori per righe è diverso da zero), le rette $r, s$ sono sghembe.

(b). Il piano cercato ha equazione vettoriale $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
Corrispondenti equazioni cartesiane sono $x_1 + x_2 - 1 = 0$.

**Esercizio 2.** (a). Il sistema che definisce $W_k$ è lineare, ma è omogeneo se e solo se $k^2 - 1 = 0$. ossia $k = \pm 1$.

(b). Basi per $W_1$, $W_{-1}$ possono essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ rispettivamente.

(c). Equazioni per $W_1 \cap W_{-1}$ sono $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ : pertanto una base di $W_1 \cap W_{-1}$ è costituita dal vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dalla formula di Grassmann $W_1 + W_{-1}$ ha dimensione 3, e i tre vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ appartengono a $W_1 + W_{-1}$ e sono linearmente indipendenti, pertanto sono una base.

**Esercizio 3.** (b). Fissiamo le basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

in $V$, $W$ rispettivamente. Allora la matrice $A = {}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{B}}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema omogeneo associato ad $A$ si ottengono coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di una base di $Ker(F)$. Risulta $Ker(F) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Le righe non nulle di una forma a gradini di $A^t$ sono coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ di una base di $Im(F)$. Si ha

$$Im(F) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c). La base di $Im(F)$ trovata può essere completata a una base di $W$ aggiungendo le matrici $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**Esercizio 4.** Si vedano testi e dispense.

**Esercizio 5.** (a). Risulta $F(1) = F(t) = F(t^2) = 1 + t + t^2$, pertanto $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b). Il polinomio caratteristico di $F$ è $t^2(t-3)$, pertanto gli autovalori sono $0, 3$ con molteplicità (algebrica e geometrica) $2, 1$ rispettivamente. Basi per gli autospazi relativi a $0, 3$ sono $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. La matrice cercata è la matrice di passaggio da una base di autovettori alla base standard, pertanto $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $N^{-1}AN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.