Traccia delle soluzioni della prova di Algebra del 21-1-2005

Esercizio 1 a) Risulta $H = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_2) \mid \det(A) = \overline{1}\}$; allora H è chiuso rispetto al prodotto righe per colonne per il teorema di Binet. Inoltre se $A \in H$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \overline{1}$, per cui $A^{-1} \in H$. Si ha $\det(A) = 1$ se e solo se $\overline{a}\overline{d} = \overline{1}, \overline{b}\overline{c} = \overline{0}$ ovvero $\overline{a}\overline{d} = \overline{0}, \overline{b}\overline{c} = \overline{1}$. Pertanto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \right\} \qquad (*)$$

b) Dette $h_1, \ldots, h_6$ le matrici di H nell'ordine in cui sono state scritte in $(*)$, h_2, h_3, h_4 hanno ordine 2 mentre h_5, h_6 hanno ordine 3. Con calcoli diretti si prova che l'applicazione $f : H \to S_6$ definita da

$$\begin{array}{lll} f(h_1) = Id, & f(h_2) = (1,2), & f(h_3) = (2,3), \\ f(h_4) = (1,3), & f(h_5) = (1,2,3), & f(h_6) = (1,3,2) \end{array}$$

è un omomorfismo e quindi (essendo ovviamente iniettiva e suriettiva), un isomorfismo. I sottogruppi non banali di H sono dunque $\{h_1, h_2\}$, $\{h_1, h_3\}, \{h_1, h_4\}$, $\{h_1, h_5, h_6\}$ e solo quest'ultimo è normale.

Esercizio 2 a) $\alpha_\sigma(n+m) = \sigma^{n+m} = \sigma^n \sigma^m = \alpha_\sigma(n)\alpha_\sigma(m)$.
b) $Ker(\alpha_\sigma) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n = Id\}$; dunque $Ker(\alpha_\sigma)$ è il sottogruppo ciclico generato da $o(\sigma)$. Possiamo pertanto scegliere $\sigma_1 = (1,2,3,4)$, mentre σ_2 non esiste, dato che S_6 non ha elementi di ordine 7.
c) Affinchè $Im(\alpha_\sigma) < A_6$ occorre e basta che σ sia pari. Le possibili strutture cicliche per una permutazione pari in S_6 sono $(5,1), (4,2), (3,3), (3,1,1,1), (2,2,1,1)$.

Esercizio 3 a) Una base di U può essere $B_U = \{(1,0,0,1), (0,1,-1,1)\}$ mentre una base di W può essere $B_W\{(-1,2,0,1), (-1,1,1,0)\}$.

b) U ha equazioni $\begin{cases} a - c - d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$, pertanto $U \cap W$ ha equazioni $\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a + 2b - c - 3d = 0 \\ a + b - d = 0 \\ a - c - d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$.

Una base per $U \cap W$ è data da una base dello spazio delle soluzioni del precendente sistema. Si ha $B_{U \cap W} = \{(0,1,-1,1)\}$.
c) La base cercata si ottiene estraendo un insieme indipendente massimale da $B_U \cup B_W$. Una possibilità è $\{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,0)\}$.

Esercizio 4 Risulta $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Poichè A è triangolare superiore, risulta $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$, pertando f è un isomorfismo. Similmente si vede subito che il polinomio caratteristico è $(t-1)^2(t-2)$, dunque gli autovalori sono $1, 2$ con molteplicità algebriche rispettive $2, 1$. Poichè la molteplicità geometrica di 1 è 1, f non è diagonalizzabile.