Traccia delle soluzioni della prova di Algebra del 24-1-2005

Esercizio 1 Risulta $G = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$. Ricordando che se g ha ordine n allora g^k ha ordine $n/(n,k)$, si ha $o(\overline{2}) = 6$ e quindi $o(\overline{4}) = 3, o(\overline{8}) = 2, o(\overline{16}) = 3, o(\overline{11}) = 6$; inoltre $o(\overline{5}) = 6$ e quindi $o(\overline{20}) = 2, o(\overline{17}) = 6$. Infine $o(\overline{10}) = 6$, da cui $o(\overline{13}) = 2, o(\overline{19}) = 6$.

Poichè non ci sono elementi di ordine 12, G non è ciclico. Con il procedimento precedente abbiamo determinato i sottogruppi ciclici: tre di ordine 6, $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\}$, $\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\}, \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\}$; uno di ordine 3, $\{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\}$ e tanti sottogruppi ciclici di ordine due $\{\overline{1}, \overline{a}\}$ quanti sono gli elementi $\overline{a}$ di ordine 2. Dal teorema di Lagrange segue che le uniche possibilità per l'ordine un sottogruppo non banale H di G sono $2, 3, 4, 6, 12$. Poichè H deve essere abeliano, e i gruppi abeliani di ordine $2, 3, 6, 12$ sono ciclici, l'unica possibilità che resta da considerare è quella di un sottogruppo H di ordine 4 non ciclico, quindi di tipo Klein. Si ha $H = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$.

Esercizio 2 a) Le strutture cicliche degli elementi di S_8 sono in biezione con le partizioni di 8:

struttura ciclica	ordine
8	8
$7+1$	7
$6+2$	6
$6+1+1$	6
$5+3$	15
$5+2+1$	10
$5+1+1+1$	5
$4+4$	4
$4+3+1$	12
$4+2+2$	4
$4+2+1+1$	4
$4+1+1+1+1$	4
$3+3+2$	6
$3+3+1$	3
$3+2+2+1$	6
$3+2+1+1+1$	6
$3+1+1+1+1+1$	2
$2+2+2+2$	2
$2+2+2+1+1$	2
$2+2+1+1+1+1$	2
$2+1+1+1+1+1+1$	2
$1+1+1+1+1+1+1+1$	1

b) Poichè la permutazione identica è pari, è chiaro che L non esiste. Per trovare un sottogruppo di ordine 4 costituito da permutazioni pari si può considerare il sottogruppo ciclico generato da una permutazione pari di ordine 4, ad esempio $\sigma = (1,2,3,4)(5,6)$. Risulta

$$\langle\sigma\rangle = \{(1,2,3,4)(5,6), (1,3)(2,4), (4,3,2,1)(5,6), Id\}.$$

Si può anche considerare il gruppo di tipo Klein

$$\{Id, (1,2)(3,4), (5,6)(7,8), (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)\}.$$

Infine per trovare un sottogruppo di ordine 4 non interamente contenuto in A_8 si può considerare il sottogruppo ciclico generato da una permutazione dispari di ordine 4 (ad esempio) il 4-ciclo $(1,2,3,4)$ o il gruppo tipo Klein $\{Id, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\}$.
c) Sia $R = \{\sigma \in S_8 \mid \sigma(i) = i, 4 \leq i \leq 8\}$ e sia $T = \langle(1,2,3,4,5,6)\rangle$. R è chiaramente isomorfo al gruppo simmetrico S_3 su tre elementi $1,2,3$: dunque ha ordine 6 e non è abeliano. T è ciclico di ordine 6, in particolare abeliano e dunque non isomorfo a T.

Esercizio 3 a) Risulta $F(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -b+c & -a-b+d \\ a+c-d & b-c \end{pmatrix}$, in particolare la matrice di F rispetto alla base assegnata è $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Coordinate di una base del nucleo si ottengono risolvendo il sistema $AX = 0$. Una base può essere $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$.
c) Il polinomio caratteristico di A è $t^2(t^2-5)$, per cui gli autovalori sono $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0$ con molteplicità algebriche rispettive $1,1,2$. Siccome abbiamo già visto nel punto b) che la molteplicità geoometrica dell'autovalore 0 è 2, concludiamo che F è diagonalizzabile.

Esercizio 4 a) Risulta $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
b) Coordinate di una base per $Ker(D)$ si ottengono risolvendo il sistema omogeneo associato ad A. Coordinate per una base di $Im(D)$ si ottengono considerando le righe non nulle di una forma a gradini di A^t. Basi per $Ker(D)$, $Im(D)$ possono essere $\{1-t+t^2+t^3\}, \{1+t^3, t-t^3, t^2+t^3\}$.
c) Basta verificare che i vettori $1-t+t^2+t^3, 1+t^3, t-t^3, t^2+t^3$ sono linearmente indipendenti. A tale scopo basta osservare che il determinante della matrice avente per righe le coordinate di tali vettori è non zero.