Traccia delle soluzioni della prova in itinere di Algebra del 11-1-2005

Per risposte alle domande teoriche si vedano testi o dispense.

Esercizio 1 b) Una base di W può essere $\mathcal{B} = \{(-1,-1,-2,0,1),(0,0,0,1,0)\}$.
c) Se $\{e_1,\dots,e_5\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^5$, i vettori e_2, e_3, e_5 completano $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 2 a) La generica matrice simmetrica 3×3 è $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, pertanto una base di V può essere

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) La dimensione di W è data dal rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha per righe le coordinate delle matrici che generano W rispetto alla base trovata nel punto a). Essendo tale matrice equivalente per righe a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

concludiamo che le matrici che generano W sono linearmente dipendenti e che una base per W può essere

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Laq generica matrice di U è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & z \end{pmatrix}$, pertanto una base di V può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Infine una base di $U+W$ si ottiene estraendo una base dall'unione di una base di W e una di U. Una scelta può essere

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3 a) Poichè $\det(A) = \frac{9}{4} \neq 0$ L_A è invertibile.
c) Gli autovalori di A sono $-\frac{3}{2}, 1$, con molteplicità algebrica $1, 2$ rispettivamente. Basi dei corrispondenti autospazi possono essere $\{(-1,-1,1)\}$ e $\{(1,1,0)\}$. In particolare, poichè $1 = m_g(-\frac{3}{2}) < m_a(-\frac{3}{2}) = 2$, A (e dunque L_A) non è diagonalizzabile.

Esercizio 4 a) Proviamo che se $A, B \in O(n)$ allora $AB^{-1} \in O(n)$. Per ipotesi $A^t = A^{-1}, B^t = B^{-1}$; pertanto

$$(AB^{-1})^t = (B^{-1})^t A^t = (B^t)^{-1} A^{-1} = (B^{-1})^{-1} A^{-1} = (AB^{-1})^{-1}.$$

b) Prendendo il determinante di ambo i membri nella relazione $AA^t = I$ e tenendo conto che $\det(A) = \det(A^t)$, $\det(I) = 1$ si ha $\det(A)^2 = 1$, cioè $\det(A) = \pm 1$.
c) Per il teorema di Binet $\det : O(n) \to \{1, -1\}$ è un omomorfismo; dunque $SO(n) = Ker(\det)$ è un sottogruppo normale di $O(n)$.