Soluzioni della prova in itinere di Algebra del 28-4-2003

Esercizio 1. $\overline{a} \in \mathbb{U}_{35} \iff (a, 35) = 1$ e quindi, ovviamente, $\overline{2} \in \mathbb{U}_{35}$; inoltre è ben noto che $|G| = \varphi(35) = \varphi(5)\varphi(7) = 4 \cdot 6 = 24$.

Risulta poi:

(1)
$$S =< \overline{2} >= \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{32}, \overline{29}, \overline{23}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{9}, \overline{18}, \overline{1}\}$$

e pertanto $o(\overline{2}) = 12$; ricordando poi che, per un elemento $g \in G$ di ordine n risulta $o(g^k) = \frac{n}{(n,k)}$, si ottengono immediatamente gli ordini degli elementi del sottogruppo S:

$$o(\overline{2}) = o(\overline{32}) = o(\overline{23}) = o(\overline{18}) = 12,\ o(\overline{4}) = o(\overline{9}) = 6,$$

$$o(\overline{8}) = o(\overline{22}) = 4,\ o(\overline{16}) = o(\overline{11}) = 3,\ o(\overline{29}) = 2,\ o(\overline{1}) = 1$$

(2) ovviamente $T =< \overline{8} >= \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{29}, \overline{22}\}$

(3) osserviamo innanzitutto che il gruppo G commutativo e quindi l'insieme delle classi laterali destre coincide con quello delle classi laterali sinistre. Essendo $[S : T] = 3$ e $[G : T] = 6$ esistono tre classi laterali di T in S che sono:
$$T, \quad \overline{2}T = \{\overline{2}, \overline{16}, \overline{23}, \overline{9}\}, \quad \overline{4}T = \{\overline{4}, \overline{32}, \overline{11}, \overline{18}\}$$

(4) ogni sottogruppo di un gruppo commutativo è normale.

Esercizio 2. a) Risulta $\alpha = (1, 5, 7)(2, 3, 8, 4) = (1, 7)(1, 5)(2, 4)(2, 8)(2, 3)$ 3 $\beta = (1, 3, 2)(4, 5, 6, 7, 8) = (12)(13)(48)(47)(46)(45)$; dunque α è dispari e ha ordine 12 mentre β è pari e ha ordine 15.
b) $\gamma = \alpha^{-2}\beta^3 = (1, 5, 7)(2, 3, 8, 4)^2(4, 5, 6, 7, 8)^3 = (1, 5, 2, 8, 6, 3, 4)$.
c) Poichè γ ha ordine 7, $\gamma^{831} = \gamma^{831 \, mod \, 7} = \gamma^5 = (1, 3, 8, 5, 4, 6, 2)$.

Esercizio 3. a) Per quanto riguarda f occorre verificare che $[n]_6 = [n']_6 \implies [4n]_9 = [4n']_9$. Cio' è falso: $[1]_6 = [7]_6$ ma $[4]_9 \neq [28]_9 = [1]_9$. Invece g definisce un'applicazione $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_9$: se $n - n' = 6h$ allora $g(n) - g(n') = 6n - 6n' = 6(n - n') = 36h = 9 \cdot 4h$. E' chiaro che tale applicazione è un omomorfismo.
b) Le applicazioni f_k sono omomorfismi se sono ben definite; cio' accade per i k tali che $n - n' = 6h \implies f_k(n) - f_k(n') = 6kh = 9s$ per qualche s, ovvero quando $k \in 3\mathbb{Z}$.
c) Osserviamo che $f_k = f_{k'}$ per $k \equiv k' \, mod \, 9$. Possiamo quindi assumere $0 \leq k < 9$. Allora $Ker \, f_0 = \mathbb{Z}_6$ se mentre $Ker \, f_k = \{[0]_6, [3]_6\}$ per $k \in \{3, 6\}$.
d) Se $k \in \{3, 6\}$, allora f_k è un omomorfismo non nullo, dunque $Im \, f_k \neq \{[0]_9\}$; chiaramente $Im \, f_k \neq \mathbb{Z}_9$. Allora $Im \, f_k$ è un sottogruppo proprio di $\mathbb{Z}_9$; per le proprietà dei gruppi ciclici esiste un unico tale sottogruppo in $\mathbb{Z}_9$: $\{[0]_9, [3]_9, [6]_9\}$.

Esercizio 4. Si vedano testi e dispense.