Traccia delle soluzioni della prova di Algebra del 9–1–2002

Esercizio 1 (a). Un vettore direttore per r può essere $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pertanto W ha equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ed una base può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b). Poichè i vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti (infatti $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$) deduciamo che $\dim \left(W + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 3$. Pertanto, dalla formula di Grassmann, $W \cap \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \{0\}$ e la somma è diretta. (c). F è definita su una base, quindi si può applicare il principio di estensione per linearità.
(d). Risulta

$$F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 Il polinomio caratteristico di A è $-a^2 + a^2\, t + (1+a)t^2 - (2+a)t^3 + t^4$, e gli autovalori sono $1, a, \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Tali autovalori sono tutti reali se e solo se $a \geq -\frac{1}{4}$. Quindi tale condizione è necessaria per la diagonalizzabiltà di L_A. Gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica 1 tranne nei seguenti quattro casi: $a = 1$, in cui $m_a(1) = 2$; $a = 0$, in cui $m_a(1) = 2$, $m_a(0) = 2$; $a = -\frac{1}{4}$, in cui $m_a(\frac{1}{2}) = 2$ e $a = 2$, in cui $m_a(2) = 2$. Dallo studio delle molteplicità geometriche deduciamo che nei primi due casi L_A è diagonalizzabile mentre negli altri due non lo è . Per tutti gli altri valori del parametro gli autovalori sono distinti e quindi L_A è diagonalizzabile: In definitiva L_A è diagonalizzabile per $a > -\frac{1}{4}, a \neq 2$.

Esercizio 3 (a). Si ha $x = (2, 3, 7, 9)$. (b) x ha ordine 4 e risulta $H = \{(2, 3, 7, 9), (2, 7)(3, 9), (2, 9, 7, 3), Id\}$. (c). Chiaramente $n = 4$, e un isomorfismo $H \to \mathbb{Z}_4$ può essere

$$(2, 3, 7, 9) \mapsto \overline{1},\ (2, 7)(3, 9) \mapsto \overline{2},\ (2, 9, 7, 3) \mapsto \overline{3},\ Id \mapsto \overline{0}.$$

(d). Essendo ciclico di ordine 4, H ha esattamente un sottogruppo per ogni divisore di 4. C'e' un unico divisore proprio, 2, cui corrisponde il sottogruppo $\{Id, (2, 7), (3, 9)\}$.

Esercizio 4 Si vedano i testi consigliati.