Soluzioni della prova di Matematica II del 3-6-2003

Esercizio 1. (a). La matrice generica di U è del tipo $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & b & d \\ c & d & -d \end{bmatrix}$, pertanto una base di U può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.
Una base di W può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
(b). Le equazione cartesiane di W (rispetto alla base $\{e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{13} + e_{31}, e_{22}, e_{23} + e_{32}, e_{33}\}$) sono $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$, da cui si deducono facilmente le seguenti equazioni per $U \cap W$: $\begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$. Pertanto una base per $U \cap W$ può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Una base per $U + W$ può essere

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c). Occorre aggiungere un solo vettore alla base precedentemente trovata. Questo può essere $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
(d). $U \cap W$ ha dimensione 2, quindi è isomorfo a $\mathbb{R}^2$. Un isomorfismo ϕ può essere estendendo per linearità un'applicazione che mandi una base di $U \cap W$ in una base di $\mathbb{R}^2$. Ad esempio

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2. (a) Il piano π ha equazione cartesiana $x_1 + x_3 - 1 = 0$, pertanto i suoi vettori normali sono tutti proporzionali a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dalle condizioni ulteriori si deduce che $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b). Risulta

$$F(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$F(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) = F(-\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$$
$$= -F(\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) + F(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = -\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\0\\-3\end{bmatrix}$$

Pertanto si ha $A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & -3 & 1\end{bmatrix}$.

(c). Il nucleo di A si trova risolvendo il sistema omogeneo associato ad A, mentre una base per l'immagine si ottiene considerando le righe non nulle di una forma a gradini di A^t. Risulta $Ker(F) = \mathbb{R}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$, $Im(F) = \mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

(d). Il polinomio caretteristico di F è $t^2(t-2)$, pertanto gli autovalori sono $0, 2$ con molteplicità algebriche $2, 1$ rispettivamente. Poichè in generale $m_g \leq m_a$, si ha $m_g(2) = m_a(2) = 1$; d'altra parte $m_g(0)$ è la dimensione di $Ker(F)$, che abbiamo giá calcolato essere 2. Pertanto si ha anche $m_g(0) = m_a(0)$; dal momento che tutti gli autovalori sono reali, possiamo concludere che F è diagonalizzabile. Una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0 è data dalla base di $Ker(F)$ precedentemente determinata. Gli autovettori relativi all'autovalore 2 sono tutti proporzionali a $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Esercizio 3. Si vedano i testi consigliati.

Esercizio 4. (a) Dato $k \in \mathbb{Z}$, denotiamo con $\overline{k}$ la sua classe resto modulo n. Risulta:

$$\begin{aligned} u_{k,+} \cdot u_{h,+} =& u_{\overline{k+h},+} \\ u_{k,+} \cdot u_{h,-} =& u_{\overline{k+h},-} \\ u_{k,-} \cdot u_{h,+} =& u_{\overline{k-h},-} \\ u_{k,-} \cdot u_{h,-} =& u_{\overline{k-h},+} \end{aligned}$$

pertanto D è chiuso rispetto al prodotto righe per colonne; inoltre è chiara l'associatività dell'operazione e l'esistenza dell'elemento neutro (la matrice identità 2×2). Infine le relazioni precedenti implicano che

$$u_{k,+}^{-1} = u_{n-k,+}, \qquad u_{k,-}^{-1} = u_{k,-}$$

(b) Siccome $\mathbb{Z}_n$ ha cardinalità n, D ha $2n$ elementi. Per $n = 1, 2$ D è abeliano; per $n > 2$ D non è abeliano, perche' $u_{1,+} \cdot u_{n-1,-} \neq u_{n-1,-} \cdot u_{1,+}$.

(c) Il sottogruppo generato da $u_{1,+}$ è formato dalle matrici $u_{k,+}$, $k \in \mathbb{Z}_n$, ed ha pertanto ordine n. I suoi generatori sono le matrici $u_{k,+}$ ove $k < n$ è relativamente primo con n.