Matematica II (Statistica)

Proff. E. Casadio Tarabusi, K. O'Grady e P. Papi

Esame del 24/09/2015, soluzioni

24 Settembre 2015

Esercizio 1. Di ciascuna delle seguenti successioni dire (motivando la risposta) se è convergente/divergente/indeterminata e se è convergente determinarne il limite:

$$a_n = \frac{2n^3 + n - 3}{n^3 + 100n^2 + 5}, \qquad b_n = \frac{\sin n}{n}.$$

(R)Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n - 3}{n^3 + 100n^2 + 5} = 2,$$

come si vede scrivendo

$$\frac{2n^3 + n - 3}{n^3 + 100n^2 + 5} = \frac{2 + n^{-2} - 3n^{-3}}{1 + 100n^{-1} + 5n^{-3}}.$$

Vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n},$$

perchè il valore assoluto del numeratore è limitato superiormente da 1, e il denominatore diverge a $+\infty$.

Esercizio 2. Determinate

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \cos x - x}.$$

(Ri)Soluzione: Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \cos x - x} = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

I polinomi di MacLaurin di $\sin x$ e $\cos x$ danno

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Quindi

$$\frac{\sin x - x}{x \cos x - x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(x)}{-\frac{1}{2} + o(x)},$$

da cui segue (1). In alternativa si può applicare L'Hôpital. Siano $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x \cos x - x$. Si trova che

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f'(0) = g'(0) = 0, \quad f''(0) = g''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad g'''(0) = -3,$$

e segue (1).

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}.$$

(3a) Determinate $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(3b) Determinate il dominio di definizione di $f(x)$.

(3c) Determinate gli asintoti verticali del grafico di $f(x)$.

(3d) Determinate punti di max/min (relativo) di $f(x)$, e gli intervalli su cui $f(x)$ è crescente/decrescente.

(3e) Disegnate il grafico di $f(x)$.

(Ri)Soluzione:

(3a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(3b) Il dominio di definizione di $f(x)$ è $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. .

(3c) Gli asintoti verticali del grafico di $f(x)$ sono $x = 1$ e $x = 2$ (dati dalle radici del denominatore).

(3d) Si ha

$$f'(x) = e^x \frac{x^2 - 5x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2},$$

quindi gli zeri di $f'(x)$ sono gli zeri del polinomio

$$p(x) = x^2 - 5x + 5,$$

e il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di $p(x)$. Segue che $f(x)$

(a) è crescente sugli intervalli $(-\infty, 1)$, $(1, \frac{5-\sqrt{5}}{2})$ e $(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$,

(b) è decrescente sugli intervalli $(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2)$ e $(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2})$,

(c) ha un massimo (relativo) per $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$,

(d) e un minimo (relativo) per $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_2^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x dx.$$

(Ri)Soluzione: Dimostriamo che

$$\int_2^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = \frac{51}{4} + 4\log 2.$$

La divisione (con resto) di $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ per $x^2 - 2x + 1$ dà

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + \frac{2x + 1}{(x - 1)^2}.$$

Risolvendo per $A, B \in \mathbb{R}$ l'quazione

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2},$$

troviamo che

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{2}{(x - 1)} + \frac{3}{(x - 1)^2}.$$

Quindi

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \left(x + \frac{2}{(x - 1)} + \frac{3}{(x - 1)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\log|x - 1| - \frac{3}{x - 1},$$

e perciò

$$\int_2^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2\log|x - 1| - \frac{3}{x - 1} \right]_2^5 = \frac{51}{4} + 4\log 2.$$

Dimostriamo che

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$$

Integrando per parti ripetutamente si trova che

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

Quindi

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right] = e - 2.$$

Esercizio 5. Determinate quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 5}{n^2 + 3n + 1}.$$

(Ri)Soluzione: La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n)!} \tag{2}$$

è convergente, per il criterio del rapporto (notate che la serie è a termini positivi). Infatti, se a_n è il termine n-esimo della serie,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}.$$

Siccome $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, la serie (2) è convergente. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3} \tag{3}$$

è convergente, per il criterio della convergenza assoluta e per il criterio del confronto. Infatti

$$\left|\frac{\cos n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3},$$

e siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ è convergente, segue che (3) è convergente. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 5}{n^2 + 3n + 1} \tag{4}$$

fosse convergente, il suo termine n-esimo convergerebbe a 0 per $n \to \infty$; siccome il suo termine n-esimo converge a 1, segue che la serie (4) *non* è convergente.

Esercizio 6. Si risolva il problema di Cauchy

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(Ri)Soluzione: Dimostriamo che

$$y(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}. \tag{5}$$

Siccome le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

sono $\lambda = -1, -2$, la soluzione è data da

$$y(x) = ae^{-x} + be^{-2x}$$

per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,otteniamo che la soluzione è data da (5).