Soluzioni della prova di Matematica II del 23–9–2002

Esercizio 1. (a). La retta r_2 ha equazioni vettoriali $r_2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; per determinare la posizione reciproca di r_1, r_2 bisogna studiare la dipendenza lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il determinante della matrice che ha tali vettori per righe è diverso da zero, dunque i tre vettori sono linearmete indipendenti e le rette sono sghembe.

(b) Risulta $s = \pi' \cap \pi$, ove π' (risp. π) è il piano passante per l'origine e contenente r_1 (risp. r_2). Tali piani si determinano imponendo ai fasci di piani di asse $r_i\,(i = 1, 2)$ il passaggio per l'origine. Risulta $s : \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

(c) Dal punto (b) segue che π ha equazione $3x_1 - x_2 = 0$, dunque $d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Esercizio 2. (a). W_1 non è un sottospazio di V poichè non contiene il polinomio nullo. W_2 non è un sottospazio di V perchè $1 \in W_2, t + t^2 \in W_2$ ma $1 + t + t^2 \notin W_2$. W_3 è un sottospazio di U, perchè se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ sono due matrici in W_3 ed α, $\beta \in \mathbb{R}$, si ha $\alpha A + \beta B \in W_3$; risulta infatti:

$$\begin{aligned} &(\alpha a_{11} + \beta b_{11}) + (\alpha a_{12} + \beta b_{12}) + (\alpha a_{21} + \beta b_{21}) + (\alpha a_{22} + \beta b_{22}) = \\ &\alpha(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) + \beta(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

(b) Risulta $W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{bmatrix} \in U \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Da ciò non è difficile dedurre che una base per W_3 può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$. Pertanto W_3 ha dimensione 3.

Esercizio 3. (a) Risulta $F(1) = 1 + t^2$, $F(t) = -t$, $F(t^2) = 2t^2 + t$, pertanto $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Il polinomio caratteristico è $t^3 - 2t^2 - t + 2$ e gli autovalori sono $1, -1, 2$. I rispettivi autovettori sono $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(c) F è diagonalizzabile perche' A ha autovalori reali e distinti.

Esercizio 4 Si vedano i testi consigliati.

Esercizio 5 (a) Risulta

$$G(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = G(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}) = G(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}) - G(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\2\\1\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\2\\-3\end{bmatrix}$$

$$G(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = G(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-4\\-5\\8\end{bmatrix}$$

La matrice di G rispetto alla basi indicate dal testo è $B = \begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & -4\\2 & -5\\-3 & 8\end{bmatrix}$.

(b) Poichè B ha rango massimo, pari a 2 (le sue colonne sono non proporzionali, dunque linearmente indipendenti), deduciamo che G è iniettiva. In particolare le colonne di B costituiscono una base di $Im(G)$.

(c) Esaminando le matrice

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

che è invertibile (il suo determinante vale 2), deduciamo che il completamento richiesto può essere effettuato aggiungendo i vettori e_3 ed e_4 della base canonica di $\mathbb{R}^4$.