SOLUZIONI DELLA PROVA DI ALGEBRA DEL 8/1/2004
PROFF. PAPI, PROCESI

Esercizio 1 (a) Poichè $u_3 = 2u_1 - u_2$, $u_4 = -2u_1$, i vettori u_1, u_2 generano U; essendo non proporzionali, sono anche linearmente indipendentim quindi formano una base di U. Una base di W può essere $\{w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

(b) Equazioni per U possono essere $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$; pertanto $U \cap W$ ha equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, e una sua base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pertanto $U + W$ ha dimensione 3, e una sua base può essere $\{w_1, w_2, u_2\}$. Una altro modo di procedere è il seguente: si estrae una base di $U + W$ da $\{w_1, w_2, u_1, u_2\}$; si deduce in particolare che $\dim(U + W) = 3$. Allora $\dim(U \cap W) = 1$; osservando che risulta $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u_1 + u_2 = w_1 + w_2$ si conclude che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U \cap W$ e pertanto tale vettore è una base di $U \cap W$.

(c) Se prendiamo $\{w_1, w_2, u_2\}$ come base per $U + W$, dall'analisi della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ deduciamo che il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non appartiene a $U + W$, quindi completa $\{w_1, w_2, u_2\}$ ad una base di V.

Esercizio 2 (a) Dette X_1, X_2, X_3 le matrici della base di partenza, si ha $F(X_1) = t + t^2 + t^3$, $F(X_2) = -t^3$, $F(X_3) = t^3$, che è quanto si voleva.

(b) Coordinate, rispetto alla base di partenza, del nucleo di F si ottengono risolvendo il sistema omogeneo associato ad A; coordinate, rispetto alla base di arrivo, dell'immagine di F si ottengono determinando una base dello spazio generato dalle colonne di A. Risulta $Ker(F) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Im(F) = \mathbb{R}(t + t^2) \oplus \mathbb{R}t^3$.

(c) Poichè A è triangolare, gli autolvalori sono gli elementi che giacciono sulla diagonale, cioè $0, 1$. Basi per gli autospazi relativi possono essere $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Esercizio 3 (a),(b),(c) Si vedano i testi consigliati.
(d) Se esistesse una tale applicazione F risulterebbe

$$\begin{aligned} 6 = \dim(S) &= \dim(Ker(F)) + \dim(Im(F)) = \dim(Ker(F)) + \dim(\mathbb{R}^7) \\ &= 7 + \dim(Ker(F)), \end{aligned}$$

assurdo.
(e) Detta E_{ij} la matrice che ha 1 al posto (i, j) e 0 altrove, una base di S può essere $\{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{11} + E_{31}, E_{22}, E_{23} + E_{32}, E_{33}\}$. Dal teorema di estensione per linearità , esiste un'unica applicazione lineare $F : S \to \mathbb{R}^6$ tale che

$$F(E_{11}) = e_1, \quad F(E_{12} + E_{21}) = e_2, \quad F(E_{11} + E_{31}) = e_3,$$

$$F(E_{22}) = e_4, \quad F(E_{23} + E_{32}) = e_5, \quad F(E_{33}) = e_6$$

ove $\{e_1, \dots, e_6\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^6$. Esplicitamente

$$F(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Poichè F manda una base in una base, F è un isomorfismo.