SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA
DI GEOMETRIA (14–06–2001)

Esercizio 1 (a). La retta s può determinarsi come intersezione del piano π_1 passante per P e contenente r e del piano π_2 passante per P e perpendicolare ad r. Per determinare π_1 si impone al fascio di piani di asse r il passaggio per P; si ottiene $\pi_1 : 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0$. Poichè poi un vettore direttore per la retta r è $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il piano π_2 ha equazione cartesiana $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$. Pertanto:

$$s : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

(b). La distanza cercata è la distanza di P dal punto $Q = \pi_2 \cap r$. Risulta $Q \equiv \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ e $d(P, r) = d(P, Q) = \frac{\sqrt{42}}{3}$

Esercizio 2 (a) Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$; denotiamo con v_1, v_2, v_3 i vettori di $\mathcal{B}$; allora risulta:

$F(e_1) = v_2 - v_3, \quad F(e_1) = v_3, \quad F(e_1) = 3v_1 + 4v_2 - 4v_3, \quad F(e_1) = -v_1 - v_2 + v_3,$

dunque la matrice cercata è $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Poichè la base di partenza è la base standard, si ha $Ker(F) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid AX = 0\}$, e una base è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dal teorema "nullità più rango" deduciamo che $dim(Im(F)) = 3$, pertanto F è suriettiva e ogni base di $\mathbb{R}^3$ è una base di $Im(F)$.

(c) Si deve risolvere il sistema $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$. Le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 (a) $W^\perp$ ha equazioni cartesiane $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; una base per $W^\perp$ può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) I vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, dunque formano una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre

$$F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

F risulta definita su una base, dunque è univocamente definita su ogni vettore di $\mathbb{R}^3$. Per determinare la matrice di F rispetto alla base standard, osserviamo che

$$\begin{aligned}F(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) &= F(-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})\\ &= -F(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Similmente si ottiene $F(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, pertanto la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) Il polinomio caratteristico di A è $t^2(t-2)$, dunque tutti gli autovalori ($t=0$, $t=2$) sono reali; inoltre $m_g(0) = dim(Ker(F)) = 2 = m_a(0)$, pertanto F è diagonalizzabile.

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 (a) Il polinomio caratteristico di A è $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = (t-1)^2(t-4)$. Poichè tutti gli autovalori sono positivi, g è definita positiva.
(b) Un base ortogonale rispetto a g può determinarsi trovando una base di autovettori per A ortogonale rispetto al prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$; ad esempio $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. (Un altro modo di procedere è applicare il procedimento di Gram-Schmidt ad una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$).