Soluzioni della prova di Matematica II del 8-4-2002

Esercizio 1. (a). La rette r, s hanno equazioni vettoriali $r : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per determinare la posizione reciproca di r, s bisogna studiare la dipendenza lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il determinante della matrice che ha tali vettori per righe è diverso da zero, dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti e le rette sono sghembe.
(b) Equazioni vettoriali per il piano π si ottengono imponendo il passaggio per l'origine e imponendo che la giacitura di π sia generata da vettori direttori per r, s. Si ottiene $\pi : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Eliminando i parametri s, t si ottiene $\pi : x_1 - x_3 = 0$.

Esercizio 2. (a). Una base per U si ottiene considerando le righe non nulle di una forma a gradini della matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Una base può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Una base di W si ottiene risolvendo il sistema che definisce W. Una base può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. (b). L'unione delle basi di U e di W è un sistema di generatori per $U + W$, dal quale si può estrarre una base (ad esempio prendendo le righe non nulle di una forma a gradini della matrice che ha tali vettori per righe). Siccome in tal modo si ottengono tre vettori, deduciamo che $U + W = U$, ovvero che $W \subset U$. In particolare la base di U trovata nel punto precedente è anche una base di $U + W$. Inoltre $U \cap W = W$, dunque $dim(U \cap W) = dim(W) = 2$.

(c). Occorre trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $v \notin U + W$. Esaminando la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ si deduce che il completamento richiesto può essere effettuato tramite il vettore e_4 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Considerata la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, si ha $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

pertanto le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ del vettore in esame sono $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3. (a) Poiche' $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

risulta $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) Coordinate di $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix})$ rispetto alla base fissata in V si ottengono calcolando $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dunque $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. (c) Risulta $Ker(F) = \Big\{X \in R^4 \mid AX = 0\} = \{X \in R^4 \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Big\}$ e una base di $Ker(F)$ può essere costituita dai vettori e_2 ed e_4 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Coordinate di una base di $Im(F)$ rispetto alla base fissata in V si ottengono considerando le righe non nulle di una forma a gradini di A^t. Si ha $Im(F) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 5 (a) La matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo è $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $(t-1)(t+1)(t-2)$, dunque gli autovalori sono $-1, 1, 2$. Essendo reali e distinti, F è diagonalizzabile. (b). Basi per gli autospazi relativi a $-1, 1, 2$ sono costituite dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispettivamente. (c) I vettori ricavati nel punto precedente costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per F, pertanto rispetto a tale base la matrice di F è diagonale.