Soluzioni della prova di Matematica II del 5-7-2002

Esercizio 1. (a). Un vettore direttore per retta s può essere $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$, pertanto il piano α ha equazione cartesiana del tipo $x_1 - x_2 - x_3 + d = 0$, ove d si determina imponendo il passaggio per P; risulta $\alpha: \ x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0$. (b). La retta r può determinarsi come intersezione del piano α con il piano β passante per P e contenente s: tale piano ha equazione cartesiana $x_1 + x_3 - 2 = 0$, pertanto $r: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2 = 0 \end{cases}$. (c). Il vettore direttore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ di s è ortogonale ad $\mathbf{n}_\pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, che è un vettore normale al piano π; concludiamo che s e π sono paralleli. Pertanto la distanza righiesta uguaglia la distanza di un punto qualsiasi di s (ad esempio P) da π: dunque $d(s,\pi) = \sqrt{2}$.

Esercizio 2. (a). W_1, W_2 non sono sottospazi di V perchè non contengono il polinomio nullo. W_3 non è un sottospazio di U: infatti $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U$ ma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin U$. W_4 è invece un sottospazio di U: considerati arbitrari elementi $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ in W_4 e arbitrari scalari reali α, β, si ha

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & 0 \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{bmatrix} \in W_4$$

(b). Poichè $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ le tre matrici a secondo membro formano un sistema di generatori per W_4; sono anche linearmente indipendenti:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e la precedente relazione implica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Le matrici considerate sono una base di W_4, che ha pertanto dimensione 3.

Esercizio 3. (a). Risulta $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1 - t$,

$$F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = (t - t^2) - (1 - t) = -1 + 2t - t^2$$

$$F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) - F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1 - t^2 - (t - t^2) = 1 - t$$

dunque la matrice cercata è $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) Coordinate di $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix})$ rispetto alla base fissata in V si ottengono calcolando $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dunque $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = 2(1 - t^2)$. (c) Risulta $Ker(F) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0\}$ e una base di $Ker(F)$ può essere costituita dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. La matrice A ha rango due; poichè le prime due colonne sono linearmente indipendenti, esse forniscono coordinate per una base di $Im(F)$ rispetto alla base fissata in V. Una base di può quindi essere $\{1 - t, -1 + 2t - t^2\}$.

Esercizio 4 Si vedano i testi consigliati.

Esercizio 5 (a) La matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo è $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $(t^2+1)(t-2)t$, dunque gli unici autovalori reali sono $0, 2$ (con molteplicità algebrica 1). Pertanto F non è diagonalizzabile. (b). Basi per gli autospazi relativi a $0, 2$ sono costituite dai vettori $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispettivamente. (c). I vettori ricavati nel punto precedente sono linearmente indipendenti perchè non sono proporzionali (più in generale perchè sono autovettori relativi ad autovalori distinti). Dunque essi costituiscono una base per il sottospazio somma degli autospazi.