Matematica II (Statistica)

Proff. E. Casadio Tarabusi, K. O'Grady e P. Papi

Esame del 6/07/2015, soluzioni

6 Luglio 2015

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

(R)Soluzione: Dimostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2} = e \tag{1}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})} = 0. \tag{2}$$

Per dimostrare (1), scriviamo

$$\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2} = \left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{-1}.$$

La (1) segue, perchè

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1} = e, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{-1} = 1.$$

Per dimostrare (2), notiamo che, sviluppando in serie di MacLaurin la funzione $f(x) = \log(1+t)$, si ottiene

$$\log(1+t) = t + o(t).$$

Ponendo $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$\log(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Quindi,

$$\frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})} = \frac{x\sin(1/x)}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}\sin(1/x)}{1+o(\sqrt{x})/\sqrt{x}}. \tag{3}$$

Ora, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin(1/x) = 0$, perchè $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = 0$ e la funzione $\sin(1/x)$ è limitata. Da ciò, e da (3), segue immediatamente (2).

Esercizio 2. Determinare al variale del parametro reale a la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^a\log(x)}{1+x^2}\,dx \tag{4}$$

(Ri)Soluzione: Dimostriamo che (4) è convergente se e solo se $-1 < a < 1$. Ricordiamo che, integrando per parti, si ottiene

$$\int x^a\log x = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} & \text{se } a \neq -1, \\ \frac{\log^2 x}{2} & \text{se } a = -1. \end{cases} \tag{5}$$

La funzione integranda è continua su $(0,+\infty)$, quindi l'integrale è convergente se e solo se sono convergenti i due integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{x^a \log(x)}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^a \log(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Studiamo

$$\int_0^1 \frac{x^a \log(x)}{1+x^2}\,dx. \tag{6}$$

L'integrando è non positivo, e si ha

$$x^a \log(x) \le \frac{x^a \log(x)}{1+x^2} \le \frac{x^a \log(x)}{2} \le 0, \qquad x \in (0,1].$$

Quindi (6) è convergente se e solo se lo è

$$\int_0^1 x^a \log(x)dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^a \log(x)dx. \tag{7}$$

Per (5), si ha

$$\int_c^1 x^a \log(x)dx = \begin{cases} -\frac{c^{a+1}}{(a+1)^2}\left((a+1)\log c - 1\right) - \frac{1}{(a+1)^2} & \text{se } a \neq -1, \\ -\frac{(\log c)^2}{2} & \text{se } a = -1. \end{cases}$$

Segue che (7) è convergente se e solo se $-1 < a$. Ora studiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^a \log(x)}{1+x^2}\,dx. \tag{8}$$

L'integrando è non negativo, e si ha

$$0 \le \frac{x^{a-2}}{2}\log(x) \le \frac{x^a \log(x)}{1+x^2} \le x^{a-2}\log(x), \qquad x \in [1,+\infty).$$

Quindi (6) è convergente se e solo se lo è

$$\int_1^{+\infty} x^{a-2}\log(x)dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c x^{a-2}\log(x)dx. \tag{9}$$

Per (5), si ha

$$\int_1^c x^{a-2}\log(x)dx = \begin{cases} \frac{c^{a-1}}{(a-1)^2}\left((a-1)\log c - 1\right) - \frac{1}{(a-1)^2} & \text{se } a \neq -1, \\ \frac{(\log c)^2}{2} & \text{se } a = -1. \end{cases}$$

Segue che (9) è convergente se e solo se $a < 1$.

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}.$$

(3a) Determinate $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(3b) Determinate il dominio di definizione di $f(x)$.

(3c) Determinate gli asintoti verticali del grafico di $f(x)$.

(3d) Determinate punti di max/min di $f(x)$, e gli intervalli su cui $f(x)$ è crescente/decrescente.

(3e) Disegnate il grafico di $f(x)$.

(Ri)Soluzione:

(3a) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(3b) Il dominio di definizione di $f(x)$ è $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(3c) Gli asintoti verticali del grafico di $f(x)$ sono $x = -1$ e $x = 1$, perchè

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty.$$

(3d) La derivata di f è

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x+1}} \frac{x(x+3)}{(x^2-1)^2}.$$

Segue che f è decrescente su $(-\infty, -3]$, su $[0,1)$ e su $(1, +\infty)$, la f è crescente su $(-3-1)$ e su $(-1, 0]$. La f ha un minimo (relativo) per $x = -3$, e un massimo (relativo) per $x = 0$.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^4-1} dx, \qquad \int x(\log x)^2 dx.$$

(Ri)Soluzione:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^4-1} dx = \int \left(\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{4(x-1)} - \frac{3}{4(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{3}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, integriamo per parti due volte:

$$\int x(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x \log x dx, \qquad \int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c.$$

In conclusione

$$\int x(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + c.$$

Esercizio 5. Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n-2}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{5/3}+5}{n^2+3n^{1/2}+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 2^{2n}}.$$

(Ri)Soluzione: La serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n-2}{n+1} \tag{10}$$

è convergente per il criterio di Leibniz. Infatti

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n-2}{n+1} = \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(-\log \frac{n-2}{n+1} \right),$$

e $\{-\log \frac{n-2}{n+1}\}$ è una successione positiva decresente, che tende a 0, come si vede scrivendo

$$-\log \frac{n-2}{n+1} = \log \frac{n+1}{n-2} = \log \left(1 + \frac{3}{n-2} \right).$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{5/3}+5}{n^2+3n^{1/2}+1}$$

è divergente, basta confrontarla con la serie (divergente) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{5/3}}{n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5 2^{2n}}$$

è divergente. Infatti, indicando con a_n il termine n-esimo della serie,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^5,$$

e quindi la divergenza segue dal criterio del rapporto. Ad analogo risultato si arriva usando il criterio della radice

Esercizio 6. Si risolva il problema di Cauchy

$$y'-2y=\frac{e^{3x}}{e^x+1},\qquad y(0)=\log(2e). \tag{11}$$

(Ri)Soluzione: Moltiplicando ambo i membri di

$$y'-2y=\frac{e^{3x}}{e^x+1} \tag{12}$$

per e^{-2x}, otteniamo l'equazione differenziale

$$(e^{-2x}y)'=e^{-2x}y'-2e^{-2x}y=\frac{e^x}{e^x+1},$$

cioè

$$e^{-2x}y=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\log(e^x+1)+c.$$

(L'integrale indefinito si può calcolare per sostituzione, ponendo $t=e^x$.) Quindi le soluzioni di (12) sono

$$y=e^{2x}\log(e^x+1)+ce^{2x},\qquad c\in\mathbb{R}.$$

Imponendo che $y(0)=\log(2e)$, troviamo l'unica soluzione

$$y=e^{2x}\log(e^x+1)+e^{2x}.$$