Traccia delle soluzioni della prova di Algebra del 8-6-2005

Esercizio 1. (a). Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (in quanto non proporzionali). Pertanto $\dim(W_k) \geq 2$, $\forall\, k$. Vale l'uguaglianza solo quando $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle altre due matrici; ciò avviene per ogni valore di k:

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - (k-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\dim(W_k) = 2\ \forall\, k \in \mathbb{R}$.
(b) Risulta $W_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vettori che estendono $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a una base di V possono essere $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(c) $U = \{\begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix} \in V \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. È chiaro che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in U \cap W_1$. D'altra parte $U \cap W_1$ non può avere dimensione 2 (altrimenti $U = W_1 = U \cap W_1$, e questo caso si esclude facilmente). Pertanto $U \cap W_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in U \cap W_1$. Dalla formula di Grassmann $\dim(U + W_1) = \dim(U) + \dim(W_1) - \dim(U \cap W_1) = 2 + 2 - 1 = 3$, e $U + W_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. (a). Risulta

$$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} F(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} F(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} F(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $Ker(F) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $Im(F) = S_C(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus$

$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(c) Il polinomio caratteristico di A è $t(t+1)^2$, pertanto gli autovalori sono $0, -1$ con molteplicità algebrica $1, 2$, rispettivamente. L'autospazio relativo a -1 ha dimensione 2; una base può essere $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Come già visto nel punto (b), l'auotspazio relativo a 0 ha base $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque F è diagonalizzabile. la matrice cercata è quella che esprime una base di autovettori per F in termini della base standard. Dunque $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. (a). Risulta $\mathbb{U}_{36} = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{35}\}$. Inoltre

$$\langle\overline{5}\rangle = \{\overline{5}, \overline{25}, \overline{17}, \overline{13}, \overline{29}, \overline{1}\}, \quad \langle\overline{7}\rangle = \{\overline{7}, \overline{13}, \overline{19}, \overline{25}, \overline{31}, \overline{1}\}, \quad \langle\overline{11}\rangle = \{\overline{11}, \overline{13}, \overline{35}, \overline{25}, \overline{23}, \overline{1}\}$$

Ricordando che $o(g^k) = \frac{o(g)}{(k, o(g))}$ deduciamo che gli elementi scritti precedentemente nei tre sottogruppi ciclici hanno ordini rispettivi $6, 3, 2, 3, 6, 1$. Non essendoci un elemento di ordine 12, il gruppo non è ciclico. Gli altri sottogruppi ciclici sono quindi $\{\overline{1}, \overline{17}\}, \{\overline{1}, \overline{19}\}, \{\overline{1}, \overline{35}\}, \{\overline{1}, \overline{25}, \overline{13}\}$. L'unico gruppo di tipo Klein è $\{\overline{1}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{35}\}$.
(b) Sia $S = \{\overline{1}, \overline{25}, \overline{13}\}$ l'associata partizione in classi laterali è

$$\mathbb{U}_{36} = \{\overline{1}, \overline{25}, \overline{13}\} \cup \{\overline{5}, \overline{17}, \overline{29}\} \cup \{\overline{7}, \overline{19}, \overline{31}\} \cup \{\overline{11}, \overline{23}, \overline{35}\}$$

Dunque, denotando con $[\overline{a}]$ la classe di $\overline{a}$ modulo S, si ha

$$\mathbb{U}_{36}/S = \{[\overline{1}], [\overline{5}], [\overline{7}], [\overline{11}]\}.$$

Poichè ogni elemento non banale ha ordine 2 (ad esempio $[\overline{5}] \cdot [\overline{5}] = [\overline{25}] = [\overline{1}]$) deduciamo che tale quoziente non è ciclico.

Esercizio 4. (a). Ricordiamo che le struttire cicliche delle permutazioni di S_9 ssono in corrispondenza biunivoca con le partizioni di 9 e che l'ordine di una permutazione è il m.c.m. delle lunghezze dei cicli. Poichè $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$ le possibili partizioni relative agli elemmenti di ordine 6 sono le seguenti

$$(6,1,1,1), \quad (6,2,1), \quad (6,3), \quad (3,2,1,1,1,1), \quad (3,2,2,1,1), \quad (3,2,2,2), \quad (3,3,2,1).$$

(b) σ, τ deveno avere diversa struttura ciclica ed essere pari. Ci sono soltanto due siffatte strutture cicliche: $(6,2,1)$ e $(3,2,2,1,1)$. Possiamo prendere $\sigma = (1,2,3,4,5,6)(7,8)$, $\tau = (1,2,3)(4,5)(6,7)$.