Corso di laurea in Fisica. Prova di Geometria del 24-9-2013

Prof. Paolo Papi

NOME   COGNOME

Lo svolgimento di ciascun esercizio deve essere giustificato. Non si possono utilizzare testi o dispense. Non scrivere nella parte sottostante. Risolvere tutti gli esercizi in due ore e mezzo. Convenzione notazionale: i vettori di $\mathbb{K}^n$ sono scritti per riga.

1.

2.

3.

4.

5.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Si considerino le rette di equazioni

$$r: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad , \quad s: \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Determinare la posizione reciproca di r, s.
b) Determinare equazioni cartesiane e vettoriali del piano π passante per il punto di coordinate $(1, 1, 1)$ parallelo ad r, s.
c) Determinare la distanza di s da π.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Si assuma il seguente fatto: gli elementi $\{f_1, \ldots, f_n\}$ individuati dalla condizione $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ formano una base di $Hom(V, \mathbb{K})$, detta base duale della base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
a) Sia $V = \mathbb{R}^3$. Trovare esplicitamente la base duale della base standard di V e determinare le coordinate del funzionale $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3$ rispetto a tale base.
b) Sia $V = \mathbb{R}^3$. Trovare esplicitamente la base duale della base

$$\{(1,1,0), (0,1,1), (0,-1,0)\}$$

di V e determinare le coordinate del funzionale $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3$ rispetto a tale base.

Esercizio 3. Si consideri l'operatore lineare $L_{A_\lambda} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4, L(A_\lambda)(X) = A_\lambda X$,

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare la diagonalizzabiltà di L_{A_λ} al variare del parametro λ.
b) Per i valori di λ per cui L_{A_λ} non è diagonalizzabile, determinare la forma di Jordan di A_λ.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $P : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $P^2 = P$. Dimostrare che

$$V = Ker(P) \oplus Im(P).$$

Mostrare con un esempio che l'ipotesi $P^2 = P$ è essenziale.

Esercizio 5. Si consideri lo spazio $sl(2,\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a traccia nulla.
a) Si determini la matrice M della forma bilineare simmetrica $T(A,B) = Tr(AB)$ rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
b) Determinare una matrice ortogonale S tale che $S^t M S$ è diagonale.