SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA
DI GEOMETRIA (24–9–2001)

Esercizio 1 (a) Equazioni vettoriali per r sono:

$$r : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poichè i vettori direttori direttori di r, s sono proporzionali (in effetti uguali), concludiamo che le rette sono parallele. Poichè il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ non appartiene ad r, le rette sono distinte.

(b) I vettori $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ generano la giacitura di π; pertanto π ha equazione vettoriale $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Un'equazione cartesiana di π si ottiene dalla precedente eliminando i parametri s, t; si ottiene $x_1 - 4x_2 + x_3 + 2 = 0$.

(c) Poichè r è parallela a π, la distanza cercata eguaglia la distanza di un punto qualsiasi di r da π; si ha quindi $d(r, \pi) = d(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \pi) = \frac{8}{\sqrt{18}}$.

Esercizio 2 (a) Risulta:

$$F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dunque la matrice cercata è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) La matrice B di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di paretenza e di arrivo è $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il nucleo di F è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a B, mentre $Im(F)$ coincide con lo spazio generato dalle colonne di B. Rispettive basi possono essere $\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\-2\end{bmatrix}\right\}$ e $\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$.

Esercizio 3 (a) La matrice di F_k rispetto alla base $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ presa come base di partenza e di arrivo in V è $A_k = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&k&0\\0&k&k\end{pmatrix}$. F_k è un isomorfismo se e solo se è iniettiva (la dimensione del dominio coincide con quella del codominio); poichè $\det(A_k) = 2k^2$, F_k è iniettiva per ogni $k \neq 0$.
(b) Il polinomio caratteristico di F_k è $(t-2)(t-k)^2$ e gli autovalori sono $2, k$. Se $k \neq 2$ la molteplicità algebrica di 2 è uno e quella di k è due. Se invece $k = 2$, 2 è l'unico autovalore, con molteplicità algebrica tre. Studiamo la molteplicità geometrica dell'autovalore k; cio' equivale a studiare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix}k-2&0&0\\0&0&0\\0&-k&0\end{pmatrix}.$$

Tale rango è due se $k \neq 0, 2$ e uno altrimenti. Corrispondentemente la molteplicità geometrica di k è uno se $k \neq 0, 2$ e due altrimenti. L'unico caso in cui molteplicità algebrica e geometrica coincidono è $k = 0$. Pertanto F_k è diagonalizzabile solo per $k = 0$.

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 (a) Tenuto conto che l'elemento di posto (i, j) della matrice di g rispetto alla base canonica è il coefficiente di $x_i y_j$, si ha $A = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è $(t-1)(t-3)^2$, pertanto gli autovalori sono 1, 3. Essendo tali autovalori positivi, g è definita positiva.
(b) Autovettori relativi a 1 3 sono $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, rispettivamente. Si verifica facilmente che tali vettori sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Normalizzandoli, otteniamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_A, e la cercata matrice ortogonale N è la matrice che esprime i vettori di $\mathcal{B}$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$N = \begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$