Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, si considerino le retta r, s di equazioni

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r ed s.

(b) Determinare equazioni cartesiane per il piano π passante per il punto P di coordinate $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e parallelo al piano per r ed s.

(c) Determinare la distanza della retta r dal piano π.

Esercizio 2. Si cosideri l'operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare basi per $Ker(F)$ e per $Im(F)$.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate 2×2 triangolari superiori. Si consideri l'operatore lineare $F_k : V \to V$

$$F_k(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & kx_2 \\ 0 & k(x_2 + x_3) \end{pmatrix}.$$

ove k è un parametro reale.

(a) Determinare i valori di k per cui F_k è un isomorfismo.

(b) Determinare i valori di k per cui F_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$.
(a) Si definiscano le nozioni di *somma e somma diretta* di due sottospazi S, T di V.
(b) Si provi che se S è un sottospazio di V, esiste un sottospazio T di V tale che $S \oplus T = V$.

Esercizio 5. Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$g(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$$

e sia g la forma polare associata.
(a) Provare che g è definita positiva.
(b) Sia A la matrice di g rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$. Determinare una matrice ortogonale N tale che $N^t\,A\,N$ è diagonale.