SOLUZIONI DELLA PIRMA PROVA IN ITINERE DI ALGEBRA

Proff. P. Papi - R. Procesi

1. Esercizio 1
   (a) Risulta $G =< \overline{1} >$ essendo $\overline{a} = a\overline{1}$, $\forall\ \overline{a} \in G$.
   (b) ci sono $\varphi(3762) = \varphi(2)\varphi(9)\varphi(11)\varphi(19) = 6 \cdot 10 \cdot 18$ generatori
   (c) essendo G ciclico esso possiede un sottogruppo (ciclico) per ogni divisore del suo ordine; inoltre se $|G| = r \cdot s \mid < \overline{r} >= s$.
   (d) $\overline{a} \in G' \iff (a, 3762) = 1$
   (e) ricordiamo che la condizione di essere un generatore di $\mathbb{Z}_{3762}$ equivale alla condizione di essere un invertibile e pertanto $|G'| = \varphi(3762) = \varphi(2)\varphi(9)\varphi(11)\varphi(19) = 6 \cdot 10 \cdot 18$
   (f) per quanto detto prima, essendo:

   $$(95, 3762) = 19, \quad (1847, 3762) = 1, \quad (1843, 3762) = 19$$

   $$(2, 3762) = 2, \quad (1859, 3762) = 11$$

   l'unico elemento invertibile è $\overline{1847}$; applicando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive si ottiene l'identità di Bézout:

   $$1 = 3762 \cdot (-842) + 1847 \cdot 1715$$

   e quindi $\overline{1847}^{-1} = \overline{1715}$.

2. Esercizio 2
   (a) Essendo G_1 commutativo, risulta, $\forall\ x, y \in G_1$,

   $$\alpha(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = \alpha(x) \cdot \alpha(y).$$

   Per quanto riguarda nucleo e immagine eseguendo i calcoli si ottiene:

   $$Im\alpha = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}, \quad Ker\alpha = \{\overline{1}, \overline{6}\}.$$

   (b) Osserviamo che G_2 non è commutativo; risulta ad esempio:

   $$\beta((12)\circ(123)) = \beta((23)) = id, \quad \beta((12))\circ\beta((123)) = id\circ(132) = (132)$$

   e quindi β non è un omomorfismo.

3. Esercizio 3
   (a) Risulta $\alpha = (1, 2, 4, 5, 11, 12, 3)(6, 7, 8)(9, 10)$, $\beta = (1, 3, 4, 6)(7, 8, 9)(5, 12, 11)$. Pertanto α è dispari ed ha ordine 42, β è dispari ed ha ordine 12. Risulta $\alpha^2\beta = (1, 2, 5)(3, 11, 12)(4, 8, 9, 6)$, pertanto $\alpha^2\beta$ è dispari ed ha ordine 12.
   (b) Risulta $\gamma = \beta^{-1}\alpha^2\beta$; poichè $\beta^{-1} = (6, 4, 3, 1)(9, 8, 7)(11, 12)$ si ha

   $$\gamma = \beta^{-1}\alpha^2\beta = (1, 2, 11, 5, 6, 3, 12)(4, 7, 9)$$

(c) Ricordiamo che se in un gruppo G un elemento g ha ordine n, risulta $g^k = g^{\overline{k}}$ ove $\overline{k}$ è la classe resto di k modulo n. Pertanto, tenendo conto che cicli disgiunti commutano e che $847 \equiv_3 1$ e $847 \equiv_4 3 \equiv_4 -1$, si ha

$$((1,2,5)(3,11,12)(4,8,9,6))^{847} = (1,2,5)(3,11,12)(4,8,9,6)^3 =$$

$$= (1,2,5)(3,11,12)(6,9,8,4)$$

(d) Dobbiamo determinare le successioni non crescenti (o non decrescenti) $(h_1, \ldots, h_k)$ di interi non negativi la cui somma è 12, il cui minimo comune multiplo è 12 e tali infine che $\sum_{i=1}^{k}(h_i - 1)$ è dispari. Per avere 12 come m.c.m. o la successione è composta solo da 12, oppure contiene $4, 3$ o infine contiene $6, 4$. Il primo caso dà una struttura ammissibile; nel secondo (risp. terzo) occorre completare la successione con interi la cui somma sia 5 (risp. 2) in modo che il minimo comune multiplo rimanga 12 e valga la condizione richiesta sulla parità. Otteniamo alla fine le seguenti strutture: (12), $(4,3,1,1,1,1,1)$, $(4,3,2,2,1)$, $(4,3,3,1,1)$, $(6,4,2)$.

4. Esercizio 4. Si vedano testi e dispense.