

**MATEMATICA DISCRETA I: ALGEBRA**  
**CANALE A-H**

A.A 2000/2001  
PROF. PAOLO PAPI

PROGRAMMA (PRELIMINARE) DEL CORSO

**1. Insiemi.**

- (1) Insiemi e operazioni tra insiemi: unione, intersezione, complementare. Prodotto Cartesiano di insiemi.
- (2) Funzioni. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche; funzione composta e funzione inversa. Primi elementi di calcolo combinatorio.
- (3) Relazioni. Relazioni d'ordine parziali e totali; elementi massimi e massimali. Relazioni di equivalenza: definizione ed esempi (in particolare, la costruzione di  $\mathbb{Q}$  come quoziente di  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , la congruenza modulo  $n$ ). Connessioni tra relazioni di equivalenza su un insieme  $A$  e partizioni di  $A$ .

**2. Aritmetica elementare.**

- (1) I numeri naturali e il principio di induzione.
- (2) Divisione euclidea in  $\mathbb{Z}$ , massimo comun divisore, fattorizzazione unica, scrittura di un numero in base assegnata.

**3. Elementi di algebra lineare.**

- (1)  $n$ -vettori, matrici, prodotto righe per colonne di matrici.
- (2) Sistemi lineari: definizione di sistema omogeneo, non omogeneo, compatibile, incompatibile. Matrici in forma a gradini e in forma a gradini ridotta. Operazioni elementari sulle righe; matrici elementari; invertibilità delle matrici elementari. Rango di una matrice. Eliminazione Gaussiana: risoluzione di sistemi lineari tramite l'eliminazione Gaussiana. Teorema di Rouchè -Capelli.
- (3) Determinanti. Teorema di Binet. Criterio di invertibilità di una matrice tramite il determinante. Teorema di Cramer e applicazione alla risoluzione dei sistemi lineari. Formula esplicita per l'inversa di una matrice invertibile.
- (4) Cenni sui numeri complessi e sulla nozione di campo.
- (5) Definizione ed esempi di spazi vettoriali (esempi importanti:  $\mathbb{K}^n$ ,  $M_{mn}(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}[t]$ ). Sottospazi (in particolare: le soluzioni di un sistema lineare omogeneo, matrici simmetriche, antisimmetriche, a traccia nulla, polinomi di grado  $\leq n$ ). Sottospazio somma e intersezione. Sottospazio generato da un insieme finito di vettori.

- (6) Dipendenza e indipendenza lineare. Basi e dimensione di uno spazio vettoriale: coordinate di un vettore rispetto a una base. Esistenza di una base in spazi vettoriali finitamente generati: teorema degli scarti successivi. Teorema di completamento a base.
- (7) Teorema di Grassmann (senza dimostrazione). Somme dirette.
- (8) Equazioni cartesiane di un sottospazio.
- (9) Applicazioni lineari: definizioni ed esempi. Sottospazi individuati da una applicazione lineare: nucleo e immagine. Principio di “estensione per linearità”. Teorema “nullità più rango”.
- (10) Applicazioni lineari e matrici: matrice di un’applicazione lineare. Matrice del cambiamento di base e formula del cambiamento di base.

### 3. Elementi di teoria dei gruppi.

- (1) Definizioni ed esempi di gruppi:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Z}_n, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot), \dots, (\mathbb{Z}_p^*, \cdot).$$

Gruppi di matrici:  $GL_n; SL_n; O_n$ .

- (2) Il gruppo simmetrico: ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti;  $S_n$  è generato dalle trasposizioni; segno di una permutazione.
- (3) Nozione di sottogruppo. Sottogruppo generato da un sottoinsieme. Ordine di un elemento.
- (4) Gruppi ciclici: ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico.
- (5) Classi laterali e teorema di Lagrange; corollari del teorema di Lagrange.
- (6) Omomorfismi. Sottogruppi normali e gruppi quoziente.

#### TESTI CONSIGLIATI

[A] B. Scimemi, *Algebretta*, Decibel-Zanichelli.

[AL] R. Ciampi Procesi, *Elementi di Algebra Lineare*, Decibel-Zanichelli.

[G] B. Scimemi, *Gruppi*, Decibel-Zanichelli.

#### RIFERIMENTI AI TESTI CONSIGLIATI

Indichiamo dove può a grandi linee reperirsi il programma nei testi consigliati.

- 1.1: [A, §1]; 1.2: [A, §2-4]; 1.3: [G, §1-3];  
 2.1: [A, §6]; 2.2: [A, §7-10]; 3.1: [AL, §7];  
 3.2: [AL, §7, §12]; 3.3: [AL, §11]; 3.4: [A, §14]; 3.5: [AL, §2, §5];  
 3.6: [AL, §3-4]; 3.7: [AL, §5]; 3.9: [AL, §6]; 3.10: [AL, §7];  
 4.1: [G, §4]; 4.2: [A, §5]; 4.3: [G, §5]; 4.4: [G, §9]; 4.5: [G, §7-8]; 4.6: [G, §10-11].