

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROGRAMMA DEL CORSO DI ALGEBRA

A.A 2006/2007
PROF. PAOLO PAPI

1. Sistemi lineari. Vettori in \mathbb{R}^n e matrici. Sistemi omogenei, non omogenei, consistenti e inconsistenti. Operazioni con le matrici e loro struttura di spazio vettoriale. Soluzione dei sistemi lineari mediante l'algoritmo di riduzione a scala (algoritmo di Gauss). Relazione tra l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare e quelle del sistema omogeneo associato. Teorema di Rouché-Capelli (senza dimostrazione).

2. Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n . Sottospazi. Generatori, basi, dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Costruzione di una base: scarti successivi e teorema del completamento. Nozione di dimensione. Somma e intersezione di sottospazi vettoriali. La nozione di spazio vettoriale astratto.

3. Applicazioni lineari. Condizioni per l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Nucleo e immagine; relazione fra le loro dimensioni. Isomorfismi. Matrice associata a un'applicazione lineare e a una coppia di basi. Costruzione di applicazioni lineari con condizioni assegnate. Matrici invertibili. Inversa di una matrice. Determinanti: loro definizione tramite lo sviluppo di Laplace. Proprietà dei determinanti (senza dimostrazione). Legame tra l'invertibilità e il rango di una matrice (senza dimostrazione).

4. Autovalori e autovettori. Operatori e matrici diagonalizzabili. Polinomio caratteristico e calcolo degli autovalori e degli autovettori. Autospazi, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Relazioni tra molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Condizioni necessarie e sufficienti per la diagonalizzabilità di matrici e operatori.

5. Elementi di teoria dei gruppi. Operazioni binarie. Gruppi. Esempi di gruppi:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Z}_n, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot), \dots, (\mathbb{Z}_p^*, \cdot).$$

Elementi invertibili in \mathbb{Z}_n ; funzione di Eulero. Il gruppo simmetrico: ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti; ogni permutazione è prodotto di trasposizioni; segno di una permutazione. Nozione di sottogruppo. Sottogruppo generato da un sottoinsieme. Ordine di un elemento. Gruppi ciclici. Teoremi sui gruppi ciclici (senza dimostrazione): ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico; un gruppo ciclico finito ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine. Classi laterali e teorema di Lagrange; corollari del teorema di Lagrange. Omomorfismi. Sottogruppi normali e gruppi quoziente (cenni).