CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROGRAMMA DEL CORSO DI ALGEBRA

A.A 2003/2004

Proff. Paolo Papi, Rita Procesi Ciampi

1. Elementi di teoria dei gruppi. Operazioni binarie. Gruppi. Esempi di gruppi:

$$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+),(\mathbb{Z}_n,+),(\mathbb{Q}^*,\cdot),\ldots,(\mathbb{Z}_p^*,\cdot).$$

Elementi invertibili in $\mathbb{Z}_n$; funzione di Eulero. Il gruppo simmetrico: ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti; ogni permutazione è prodotto di trasposizioni; segno di una permutazione. Nozione di sottogruppo. Sottogruppo generato da un sottoinsieme. Ordine di un elemento. Gruppi ciclici: ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico. Un gruppo ciclico finito ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine. Classi laterali e teorema di Lagrange; corollari del teorema di Lagrange. Omomorfismi. Sottogruppi normali e gruppi quoziente. Teorema di omomomorfismo.

2. Sistemi lineari. Sistemi omogenei, non omogenei, consistenti e inconsistenti. Matrici. Operazioni con le matrici e loro struttura di spazio vettoriale. Soluzione dei sistemi lineari mediante l'algoritmo di riduzione a scala (algoritmo di Gauss). Relazione tra l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare e quelle del sistema omogeneo associato. Teorema di Rouche'- Capelli.

3. Spazi vettoriali. Spazi e sottospazi vettoriali. Generatori, basi, dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Costruzione di una base: scarti successivi e teorema del completamento. Nozione di dimensione. Somma e intersezione di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann (senza dimostrazione). Somma diretta di sottospazi.

4. Applicazioni lineari. Condizioni per l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Nucleo e immagine; relazione fra le loro dimensioni. Isomorfismi. Matrice associata a un'applicazione lineare e a una coppia di basi. Costruzione di applicazioni lineari con condizioni assegnate. Matrici invertibili e matrici di cambiamento di base. Inversa di una matrice. Determinanti: loro definizione tramite lo sviluppo di Laplace. Proprietà dei determinanti (senza dimostrazione). Legame tra l'invertibilità e il rango di una matrice (senza dimostrazione).

5. Autovalori e autovettori. Operatori e matrici diagonalizzabili. Polinomio caratteristico e calcolo degli autovalori e degli autovettori. Autospazi, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Relazioni tra molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Condizioni necessarie e sufficienti per la diagonalizzabilità di matrici e operatori.