CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

ALGEBRA

A.A 2002/2003
Prof. Paolo Papi

Programma del corso

Prima parte: elementi di geometria analitica nello spazio e sistemi lineari.

1. Geometria affine ed euclidea in $\mathbb{E}^3$.

Rette, piani, vettori. Vettori applicati in un punto e loro struttura di spazio vettoriale. Sistemi di riferimento e coordinate. Struttura di spazio vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Equazioni vettoriali e cartesiane di rette e piani, vettori direttori, giacitura. Studio della posizione di rette e piani nello spazio tridimensionale. Ortogonalità. Norma dei vettori. Prodotto scalare standard e sue proprietà.

2. Sistemi lineari.

Sistemi omogenei, non omogenei, consistenti e inconsistenti. Matrici. Operazioni con le matrici e loro struttura di spazio vettoriale. Soluzione dei sistemi lineari mediante l'algoritmo di riduzione a scala (algoritmo di Gauss). Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Seconda parte: algebra lineare.

3. Spazi vettoriali.

Spazi e sottospazi vettoriali. Generatori, basi, dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Costruzione di una base: scarti successivi e teorema del completamento. Tutte le basi hanno la stessa cardinalità: nozione di dimensione. Rango righe e rango colonne di una matrice (la dimostrazione dell'uguaglianza di rango righe e rango colonne è omessa). Teorema di Rouche'- Capelli. Somma e intersezione di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann (senza dimostrazione). Somma diretta di sottospazi.

4. Applicazioni lineari.

Condizioni per l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Nucleo e immagine; relazione fra le loro dimensioni: teorema di "nullità più rango". Isomorfismi. Matrice associata a un'applicazione lineare e a una coppia di basi. Costruzione di applicazioni lineari con condizioni assegnate. Matrici non singolari e matrici di transizione. Inversa di una matrice non singolare.
Determinanti: loro definizione tramite lo sviluppo di Laplace. Proprietà dei determinanti (senza dimostrazione): teorema di Binet, determinante della matrice inversa di una matrice invertibile. Legame tra l'invertibilità e il rango di una matrice (senza dimostrazione). Teorema di Cramer (senza dimostrazione). Calcolo dell'inversa di una matrice non singolare tramite l'algoritmo di Gauss.

5. Autovalori e autovettori.

Operatori e matrici diagonalizzabili. Polinomio caratteristico e calcolo degli autovalori e degli autovettori. Autospazi, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Relazioni tra molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Condizioni necessarie e sufficienti per la diagonabilizzabilità di matrici e operatori.

Terza parte: elementi di teoria dei gruppi.

Semigruppi, monoidi, gruppi. Esempi di gruppi:

$$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+),(\mathbb{Z}_n,+),(\mathbb{Q}^*,\cdot),\dots,(\mathbb{Z}_p^*,\cdot).$$

Gruppi di matrici: $GL_n; SL_n; O_n$. Il gruppo simmetrico: ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti; S_n è generato dalle trasposizioni; segno di una permutazione. Nozione di sottogruppo. Sottogruppo generato da un sottoinsieme. Ordine di un elemento. Gruppi ciclici: ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico. Un gruppo ciclico finito ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine. Classi laterali e teorema di Lagrange; corollari del teorema di Lagrange. Omomorfismi. Sottogruppi normali. Monoidi liberi.

Argomenti d'esame.

Sarà richiesto di saper risolvere problemi del tipo seguente.

(1) Determinazione di equazioni vettoriale e cartesiane di rette e piani in $\mathbb{E}^3$.
(2) Studio di posizioni reciproche di rette e piani in $\mathbb{E}^3$.
(3) Questioni di ortogonalità tra rette e piani in $\mathbb{E}^3$.
(4) Decomposizioni di vettori secondo direzioni assegnate.
(5) Risoluzione di sistemi lineari, eventualmente parametrici.
(6) Riconoscere se un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio.
(7) Determinare l'indipendenza lineare di un insieme di vettori.
(8) Estrarre una base da un insieme di generatori.
(9) Completare a una base un insieme di vettori linearmente indipendenti.
(10) Determinare equazioni (cartesiane) per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
(11) Determinare basi e dimensione per somma e intersezione di sottospazi.

(12) Riconoscere se una somma di sottospazi è diretta.
(13) Riconoscere se un'applicazione tra spazi vettoriali è lineare.
(14) Determinare la matrice di un'applicazione lineare rispetto a due basi assegnate.
(15) Determinare basi per nucleo e immagine di un'applicazione lineare.
(16) Costruire applicazioni lineari soddisfacenti condizioni assegnate.
(17) Determinare autovalori e autovettori di un operatore lineare.
(18) Determinare la diagonalizzabilità di un operatore lineare.
(19) Verificare gli assiomi di gruppo per un insieme dotato di una relazione binaria.
(20) Riconoscere se un sottoinsieme di un gruppo è un sottogruppo.
(21) Determinare l'ordine di un elemento in un gruppo.
(22) Determinare i generatori e i sottogruppi di un gruppo ciclico.
(23) Scrivere una permutazione in notazione ciclica; determinarne ordine e parità
(24) Determinare le classi laterali di un sottogruppo.

Inoltre sarà richiesto di enunciare definizioni relative alle nozioni basilari introdotte nel corso e di conoscere la dimostrazione delle seguenti proposizioni.

QUESITI TEORICI

(1) Sia A una matrice a m righe ed n colonne e $B \in \mathbb{R}^m$. Si provi che se $X_0 \in \mathbb{R}^n$ è tale che $AX_0 = B$, allora

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\} = X_0 + \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}.$$

(2) Si provi che il sistema lineare $AX = B$ (ove A è una matrice a m righe ed n colonne) è compatibile se e solo se $rg(A) = rg((A|B))$.

(3) Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n$ vettori in V. Si provi che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno tra essi è combinazione lineare degli altri.

(4) Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n$ vettori in V non tutti nulli; posto $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, si provi che esiste un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_n\}$ che è una base di W.

(5) Si provi che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V se e solo se ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

(6) Si provi che se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V, $n+1$ vettori di V sono linearmente dipendenti.

(7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori in V linearmente indipendenti, con $k < n$. Si provi che esistono vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$ in V tali che $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V.

(8) Siano V, W spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Si provi che F è iniettiva se e solo se $Ker(F) = \{0\}$.

(9) Siano V, W spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva. Si provi che se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori in V linearmente indipendenti allora $F(v_1), \dots, F(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

(10) Siano V, W spazi vettoriali, $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $w_1, \dots, w_n$ vettori qualsiasi in W. Si provi che esiste un'unica applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $F(v_1) = w_1, \dots, F(v_n) = w_n$.

(11) Siano V, W spazi vettoriali, $dim(V) = n$ e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Si provi che $n = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$.

(12) Si provi che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(13) Si provi che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

(14) Sia $F : V \to V$ un operatore lineare su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Si provi che gli autovalori di F sono le radici del polinomio caratteristico di F.

(15) Si provi che la molteplicità geometrica di un autivalore è minore o uguale della sua molteplicità algebrica.

(16) Si provi il criterio di diagonalizzabilità per un operatore lineare F su uno spazio vettoriale V di dimensione finita.

(17) Si provi che ogni sottoruppo di un gruppo ciclico è ciclico.

(18) Si provi che un gruppo ciclico finito ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore dell'ordine.

(19) Si provi che ogni permutazione si scrive in modo unico (a meno dell'ordine) come prodotto di cicli disgiunti.

(20) Si dimostri il teorema di Lagrange.