Corso di Laurea Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni
Prova in itinere di Matematica secondo corso del 10-4-2015
prof. Paolo Papi

NOME COGNOME MATRICOLA

Istruzioni: La prova deve essere svolta individualmente in due ore; non si possono consultare testi o dispense né usare calcolatrici. Svolgere gli esercizi in tutti i dettagli di seguito al testo, riportando il risultato finale (quando richiesto) nella parte sottostante; se necessario utilizzare il retro del foglio. Consegnare solo questo blocco di fogli.

1. 1) $2/3$

2) e^3

3) 0

2. 1) non esiste

2) e^2

3. Insieme di definizione: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, \sqrt{2})$

$f'(x) = -\dfrac{3x^2+2x-2}{(2-x^2)(1+x)}$

Intervalli in cui la funzione è crescente: $\left(-1, \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$

Eventuali massimi e minimi relativi: $x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ punto di massimo relativo

4. 2)

$a = b = 1$

5. 2) $infB =$ -1 minimo

$\sup B =$ 1

$\overline{B} =$ $B \cup \{0, 1, 2\}$

$B' =$ $\{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Esercizio 1. (8 punti). Calcolare i seguenti limiti

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{2n+1}{3n^2+1}}-1\right),\quad 2)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2+2}\right)^n,\quad 3)\ \lim_{n\to+\infty} n\sin^3(n)\sin^2(\frac{1}{n})$$

1) $$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{2n+1}{3n^2+1}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{2x+1}{3x^2+1}}-1\right)$$

$y = 1/x$

$$= \lim_{y\to0} \frac{e^{\frac{\frac{2}{y}+1}{\frac{3}{y^2}+1}}-1}{y} = \lim_{y\to0} \frac{e^{\frac{y}{1}\cdot\frac{2+y}{3+y^2}}-1}{y} =$$

$$= \lim_{y\to0} \frac{y\cdot\frac{2+y}{3+y^2}+o(y)}{y} = \frac{2}{3}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-3}{n^2+2}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2}{3n-3}}\right)^{\frac{n^2+2}{3n-3}\cdot\frac{(3n-3)n}{n^2+2}} = e^3$$

3) $$\lim_{n\to+\infty} n\,\mathrm{sen}^3 n\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{sen}^3 n\,\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\mathrm{sen}\frac{1}{n} = 0$$

perché $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\,1/n}{1/n} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{sen}^3 n\,\mathrm{sen}\frac{1}{n} = 0$

essendo $\mathrm{sen}\frac{1}{n}$ infinitesima e $\mathrm{sen}\,n$ limitata.

Esercizio 2. (6 punti).

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-6x^2+12x-8}, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0^+}(1-\cos(x))^{\frac{1}{\log(x)}}$$

1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-6x^2+12x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}$$ e questo limite non esiste, dato

che $\lim_{x\to 2^\pm}\frac{x+2}{x-2}=\pm\infty$

2)

$$(1-\cos x)^{\frac{1}{\log x}}=e^{\log(1-\cos x)^{\frac{1}{\log x}}}=$$

$$=e^{\frac{\log(1-\cos x)}{\log x}}$$

Poiché $1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, il limite all'esponente

è $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\frac{x^2}{2}}{\log x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x+\log x+\log\frac{1}{2}}{\log x}=2$

Per la continuità della funzione esponenziale, il limite richiesto vale e^2

Esercizio 3. (7 punti). Data la funzione

$$f(x) = \log((2 - x^2)(1 + x)),$$

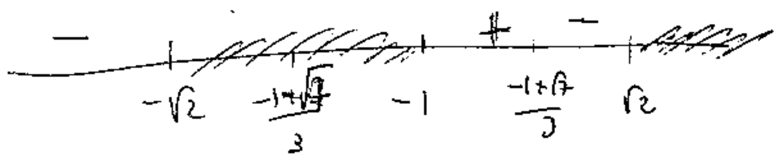
determinarne l'insieme di definizione, la derivata, gli intervalli in cui la funzione è crescente, eventuali massimi e minimi relativi.

f è definita quando $(2 - x^2)(1+x) > 0$,

ovvero $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, \sqrt{2})$

Risulta $f'(x) = -\dfrac{3x^2+2x-2}{(2-x^2)(1+x)}$

Essendo il segno di f' nel senso di f studio la



f è crescente in $\left(-1, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$ e $x_0 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ è un punto di massimo relativo

Esercizio 4.

1. (3 punti). Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arcsin(sin(x))$.
2. (3 punti). Determinare i valori dei parametri a, b per cui la funzione

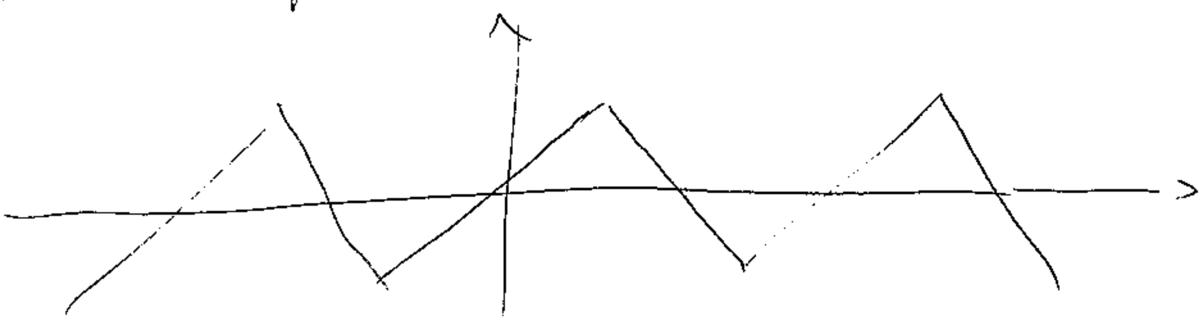
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - a}{x} & x > 0 \\ b^2 & x = 0 \\ \frac{\sin b^3 x}{x} & x < 0 \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

In $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + k\pi$ le funzioni $\sin x$, $\arcsin x$ sono mutuamente inverse, quindi $\arcsin(\sin(x)) = x$ $\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + k\pi$, se invece $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] + h\pi$ risulta $\sin(\pi - x) = \sin x$, ~~sinse~~ $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + h\pi$, per cui in tal caso

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$$

Pertanto il grafico è



2) Deve risultare

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Ora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin b^3 x}{x} = b^3$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - a}{x} = \begin{cases} \nexists\, \infty & \text{se } a<1 \\ \nexists\, \infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \end{cases}$$

Dunque necessariamente $a = 1$ e $b^2 = b^3 = 1$

da cui $b = 1$

Esercizio 5.

1. (3 punti). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e x in punto di accumulazione per A. Dimostrare che in ogni intorno di x cadono infiniti punti di A.

2. (4 punti). Si consideri l'insieme $B = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup (\frac{1}{2}, 1)$. Determinare $\sup B$, $\inf B$, specificando se sono massimo, minimo. Determinare la chiusura e l'insieme dei punti di accumulazione di B.

1) Sia $I = I(x, \delta)$, $\delta > 0$. Definiamo $I_n = I(x, \delta/n)$; per ipotesi esiste $x_n \in A \cap I_n \subseteq A \cap I$ per ogni $n \geq 1$, e $x_n \neq x$.

Dimostriamo che l'insieme $\{x_n\}$ è infinito.

Altrimenti, se $N = \min\{|x_n - x|\}$, ~~[illegible]~~ detto n_0 l'indice per cui $\frac{\delta}{n_0} < N$, si ha che

$|x_{n_0} - x| < N$, assurdo.

2) chiaramente $b < 1$ $\forall b \in B$ $b \geq -1$ $\forall b \in B$.

Risulta $\sup B = 1$ e $\min B = -1$; non esiste massimo

0 è un punto di accumulazione di B come pure $\frac{1}{2}$ e 1,

dunque $B' = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$

Infine $\overline{B} = B \cup B' = B \cup \{0, \frac{1}{2}, 1\}$