Esercizio 1. Sia G un gruppo abeliano di ordine 108.

1. Determinare i possibili G a meno di isomorfismo.
2. Supponiamo che G abbia esattamente 8 elementi di ordine 3 e uno di ordine 2. Determinare G a meno di isomorfismo.

Risoluzione:

1. Poiché $108 = 2^2 \cdot 3^3$ dal teorema di struttura dei gruppi abeliani finiti si hanno $p(2) \cdot p(3) = 2 \cdot 3 = 6$ tipi di isomorfismo ($p(n)$ è il numero di partizioni di n). Se C_k è un gruppo ciclico di ordine k si ha che G può essere isomorfo a

$C_4 \times C_{27}$

$C_4 \times C_9 \times C_3$

$C_4 \times C_3 \times C_3 \times C_3$

$C_2 \times C_2 \times C_{27}$

$C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_3$

$C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_3$

2. Solo i primi tre gruppi hanno un solo elemento di ordine 2. Gli elementi di ordine tre nei primi tre gruppi sono in numero di 2, 8, 26, quindi $G \cong C_4 \times C_9 \times C_3$

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine 21.

1. Calcolare i possibili numeri di 3-Sylow e 7-Sylow.
2. Dimostrare che G è prodotto semidiretto di un gruppo ciclico di ordine 3 e di un gruppo ciclico di ordine 7.
3. Dimostrare che ci sono due soli tipi di isomorfismo per G (uno dei quali è abeliano e l'altro no).

Risoluzione:

1) Sia n_k il numero dei k-Sylow.

Allora $n_3 \mid 7$ e $n_3 \equiv 1 \mod 3$

$n_7 \mid 3$ e $n_7 \equiv 1 \mod 7$

Pertanto $n_7 = 1$, $n_3 = 1$ o $n_3 = 7$

2) Dalla parte 1, esiste $H \trianglelefteq G$, $H \cong C_7$.

Se K è un 3-Sylow, $K \cong C_3$ e $K \cap H = \{1\}$ per considerazioni sull'ordine degli elementi. Dunque $G = HK$ e $G \cong K \ltimes H$

3). Se $n_3 = 1$, $K \trianglelefteq G$ e $G = K \times H \cong C_3 \times C_7 \cong C_{21}$

Altrimenti dobbiamo studiare gli omomorfismi $K \to \mathrm{Aut}(H)$, ovvero gli omomorfismi $C_3 \to \mathrm{Aut}(C_7) \cong C_6$.

Tali omomorfismi devono mandare un generatore di C_3 in un elemento di ordine 3 in C_6. Se identifichiamo C_3 con $\mathbb{Z}_3$ e C_6 con $\mathbb{Z}_6$, Allora due ~~omomorfismi~~ $\alpha, \alpha' : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$ determinati da $\alpha(\bar{1}) = \bar{2}$, $\alpha'(\bar{1}) = \bar{4}$. Dobbiamo vedere che

$\mathbb{Z}_7 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_7 \rtimes_{\alpha'} \mathbb{Z}_3$

Supponiamo $K = \langle a \rangle$, $\mathrm{Aut}(H) = \langle b \rangle$

Allora gli omomorfismi $K \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ ~~sono~~ determinati

$\alpha(a) = b^2$, $\alpha'(a) = b^4$

Se $\beta : K \to K$ è l'automorfismo determinato da $\beta(a) = a^2$,

risulta $\alpha' = \alpha \circ \beta$ e la mappa

$$K \underset{\alpha'}{\times} H \longrightarrow K \underset{\alpha}{\times} H$$

$$(k, h) \longrightarrow (\beta(k), h)$$

è un isomorfismo

Esercizio 3. Sia G un gruppo finito, P un P-Sylow di G. Dimostrare che $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

Risoluzione:

In generale

$$P \leq N_G(P) \leq N_G(N_G(P))$$

Sia $x \in N_G(N_G(P))$. Allora

$$xPx^{-1} \subseteq xN_G(P)x^{-1} = N_G(P)$$

Dunque P, xPx^{-1} sono Sylow in $N_G(P)$,

pertanto esiste $y \in N_G(P)$ tale che $yPy^{-1} = xPx^{-1}$

Ma $P = yPy^{-1} = xPx^{-1}$ e quindi $x \in N_G(P)$

Esercizio 4. Sia G un gruppo finito nilpotente (non banale). Dimostrare che

1. Ogni sottogruppo normale minimale è contentuto nel centro e ha ordine primo.
2. Ogni sottogruppo massimale è normale e ha indice primo.

Risoluzione:

1. Sia N un sottogruppo normale minimale. Poiché $1 \neq N \trianglelefteq G$, $N \cap Z(G)$ è non banale perché G è nilpotente. Per minimalità $N \cap Z(G) = N$, da cui $N \subset Z(G)$. Pertanto ogni sottogruppo $\neq N$ è normale in G e quindi N non ha sottogruppi propri, pertanto è ciclico di ordine primo

2. Se $M \leq G$ è massimale, poiché G è nilpotente $M \neq N_G(M)$ e pertanto $N_G(M) = G$, cioè $M \trianglelefteq G$. Poiché M è massimale, e normale, G/M ~~è~~ non ha sottogruppi propri e quindi ha ordine primo, pertanto M ha indice primo