Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali siano x_1, x_2, x_3. Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \end{cases} \qquad s: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a). Determinare la posizione reciproca di r ed s.

(b). Determinare un'equazione cartesiana per il piano π contenente s e parallelo ad r.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'insieme

$$W_k = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} kx_1 + (k-2)x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = k^2 - 1 \end{cases} \right\}.$$

(a). Provare che W_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ se e solo se $k = \pm 1$.

(b). Determinare basi per W_1 e W_{-1}.

(c). Determinare basi per $W_1 \cap W_{-1}$ e per $W_1 + W_{-1}$.

Esercizio 3. Sia V lo spazio delle matrici reali 2×3 e W quello delle matrici reali 3×2. Sia $F : V \to W$ l'applicazione

$$F(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-d & b-c \\ e & f \\ 0 & f+d-a \end{bmatrix}$$

(a). Verificare che F è lineare.

(b). Determinare basi per $Ker(F)$ ed $Im(F)$.

(c). Completare la base di $Im(F)$ precedentemente determinata ad una base di W.

Esercizio 4. (a) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.

(b). Dare le definizioni di autovalore ed autovettore per un operatore lineare $F : V \to V$.

(c) (facoltativo) Si provi che i vettori $v_1, \dots, v_n$, appartenenti ad uno spazio vettoriale V, sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'operatore lineare $F : V \to V$ definito da

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 + a_1 + a_2)t + (a_0 + a_1 + a_2)t^2$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ assunta come base di partenza e di arrivo in V.

(b) Determinare una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. Scrivere inoltre $N^{-1}AN$.