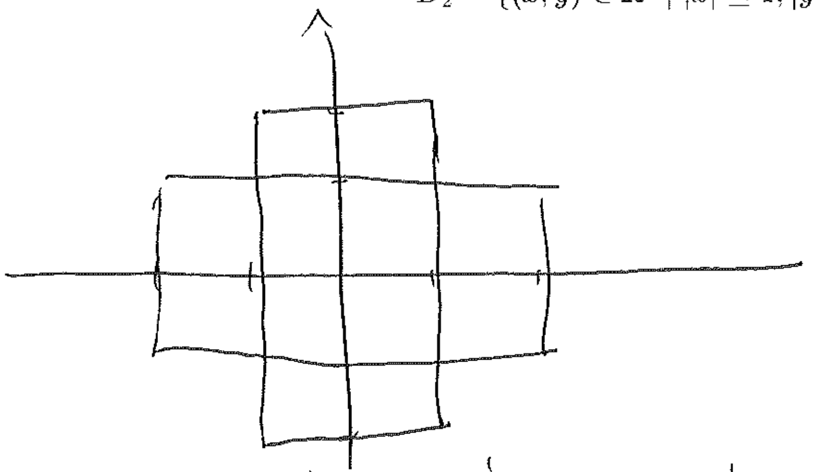
$$\iint_D (xy+1)\, dxdy$$

Esercizio 1. Calcolare $\cancel{\int_D xy\, dxdy}$, ove $D = D_1 \cup D_2$ e

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 2, |y| \le 1\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1, |y| \le 2\}.$$



$$\iint_D (xy+1) = \int_{-2}^{-1} x\, dx \int_{-1}^{1} y\, dy + \int_{-1}^{1} x\, dx \int_{-2}^{2} y\, dy + \int_{1}^{2} x\, dx \int_{-1}^{1} y\, dy$$

$$+ \mu(D) = 0 + 16 - 4 = 12$$

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\sqrt{2}}|y|^{\sqrt{3}/2}}{\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di F nell'origine.

Se $(x,y) \neq (0,0)$

$$F(x,y) = \frac{2|x|^{\sqrt{2}}|y|^{\sqrt{3}/2}}{\operatorname{sen}(2(x^2+y^2))} = \frac{2(x^2+y^2)}{\operatorname{sen}(2(x^2+y^2))} \quad \frac{|x|^{\sqrt{2}}|y|^{\sqrt{3}/2}}{x^2+y^2}$$

Ricordando il criterio di continuità e differenziabilità per funzioni del tipo $\frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}$

e tenendo conto che $2 < \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < 3$ otteniamo che la funzione è continua ma non differenziabile nell'origine

Esercizio 3. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$F(x, y) = x^2 - \cos(y).$$

$F_x = 2x$

$F_y = \operatorname{sen} y$

Dunque i punti critici sono $\{(0, k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$F_{xx} = 2 \qquad F_{xy} = 0 \qquad F_{yy} = \cos y$

e $H(0, k\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$

pertanto se k è pari il punto è un minimo relativo stretto (Hessiana definita positiva) e se k dispari un punto di sella (Hessiana indefinita)

Esercizio 4. Calcolare massimo e minimo assoluti della funzione $F(x,y) = 3x+2y$ sul vincolo $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{x}{2} - 2y + \frac{1}{4} = 0$.

Il vincolo è un'ellisse, quindi un insieme compatto, e possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana è

$$L(x,y,\lambda) = 3x+2y+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{x}{2}-2y+\frac{1}{4}\right).$$

$$\begin{cases} 3+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\lambda = 0 \\ 2+(2y-2)\lambda = 0 \\ \frac{x^2}{4}+y^2-\frac{x}{2}-2y+\frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

Si ottiene $(x,y) = \left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ e

$F(x,y) = 5-2\sqrt{10}$

oppure $(x,y) = \left(1+3\sqrt{\frac{2}{5}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ e

$F(x,y) = 5+2\sqrt{10}$

Questi punti sono rispettivamente di minimo e massimo assoluto

Esercizio 5. a). Data la funzione

$$f(x, y) = y^3 \sin(x^2 + y^2) + x,$$

calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(0, \sqrt{\pi}, f(0, \sqrt{\pi}))$. Quale è la direzione di massima crescita di f in $(0, \sqrt{\pi})$? Per quale direzione invece la crescita è nulla?
b) Considerare le soluzioni (x, y) dell'equazione

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

e dire se è possibile esplicitare y in funzione di x in un intorno di $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. In tal caso dire se il punto $x_0 = \sqrt[3]{2}$ è critico per tale funzione e classificarlo.

a) $f(0, \sqrt{\pi}) = 0$

$f_x = y^3 \cos(x^2+y^2) \cdot 2x + 1$

$f_y = 3y^2 \operatorname{sen}(x^2+y^2) + y^3 \cos(x^2+y^2) 2y$

$f_x(0, \sqrt{\pi}) = 1 \qquad f_y(0, \sqrt{\pi}) = -2\pi^2$

$z = x - 2\pi^2 (y - \sqrt{\pi})$

La direzione di massima crescita è individuata dal gradiente in $(0, \sqrt{\pi})$, cioè $\frac{v}{\|v\|}$ ove $v = (1, -2\pi^2)$

La direzione di crescita nulla è quella ortogonale al gradiente: $w = \pm \frac{(2\pi^2, 1)}{\sqrt{1+4\pi^4}}$

b) $F(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = 2+4-3\cdot 2 = 0$

$F_y = 3y^2 - 3x \qquad F_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} \neq 0$

Deriviamo $x^3 + y(x)^3 - 3x\,y(x) = 0$: $3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$

da cui $y'(\sqrt[3]{2}) = 0$. Derivando ulteriormente

$6x + 6y(y')^2 + 3y^2 y'' \cancel{-3y'} \cancel{+3y'} - 3xy'' = 0$, per cui

$6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2}\, y''(\sqrt[3]{2}) - 3\sqrt[3]{2}\, y''(\sqrt[3]{2}) = 0$ e $y''(\sqrt[3]{2}) = -2$

Dunque x_0 è un massimo relativo