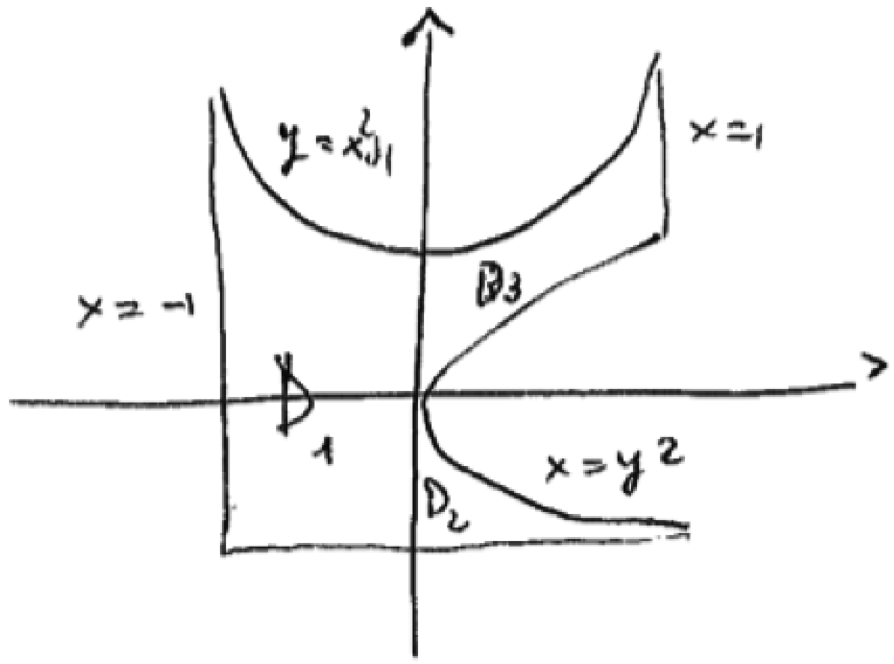
Esercizio 1. Calcolare l' area della regione $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, ove

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0, -1 \le y \le 1 + x^2\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le -\sqrt{x}\},$$
$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1 + x^2\}.$$

Risulta



Poiché $D_i \cap D_j$ ha misura zero per ogni $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$, possiamo calcolare $m(D)$ come

$$m(D) = \iint_D dx\,dy = \sum_{i=1}^{3} \iint_{D_i} dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1+x^2} dy\,dx + \int_0^1\int_{-1}^{-\sqrt{x}} dy\,dx + \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{1+x^2} dy\,dx =$$

$$= \left(2x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \begin{cases} |y|^a \sin(x) & \text{if } y \neq 0 \\ 0 & \text{if } y = 0 \end{cases}$, ove a è un parametro reale. Studiare la continuità e la differenziabilità di f nell'origine al variare di a.

Se $a \geq 0$ risulta evidentemente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

e f è continua. Se $a < 0$ il limite non esiste. Infatti

$$\lim_{y \to 0} f(y^{|a|}, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^{|a|}}{|y|^{|a|}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

f è nulla sugli assi, quindi $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Pertanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^a \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^a}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

se e solo se $1 + a > 2 \cdot \frac{1}{2}$, cioè $a > 0$.

Dobbiamo calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Se $y \neq 0$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

e questo limite non esiste.

Pertanto f non è differenziabile per $a = 0$

Esercizio 3. Determinare il dominio e studiare i punti critici della funzione

$$F(x,y) = x^2(\log(1+y) + y^2).$$

Il dominio è $y > -1$

Punti critici

$$\begin{cases} F_x = 2x\left(\log(1+y) + y^2\right) = 0 \\ F_y = x^2\left(\frac{1}{1+y} + 2y\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,y)$$

$$F_{xx} = 2\left(\log(1+y) + y^2\right)$$

$$F_{xy} = 2x\left(\frac{1}{1+y} + 2y\right) \Rightarrow H(0,y) = \begin{pmatrix} 2(\log(1+y)+y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{yy} = x^2\left(2 - \frac{1}{(1+y)^2}\right)$$

Dunque la matrice Hessiana non è definita in segno.

Poiché $F(0,y) = 0$ per $y>1$, e $\beta(y) := \log(1+y) + y^2 > 0$ per $y > 0$ e $\beta(y) < 0$ per $y < 0$, $\alpha(x) = x^2 \geq 0$, in un piccolo intorno di $(0,y)$ risulta

$$f(x,y) \geq 0 \text{ per } y > 0, \qquad f(x,y) \leq 0 \text{ se } y < 0$$

Deduciamo che $(0,y)$ è di minimo relativo per $y > 0$ e di massimo relativo per $y < 0$.

L'origine non è né di massimo né di minimo

Esercizio 4. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$$

nell'insieme $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

I punti stazionari interni si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Sul bordo di Q

$g(x,1) = x^2 - x$ $\quad |x| \leq 1 \quad \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$g(x,-1) = y^2 - x + 2$ $\quad \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$g(1,y) = y^2 - y$ $\quad |y| \leq 1 \quad \Rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$

$g(-1,y) = y^2 - y + 2$ $\quad \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Inoltre bisogna considerare i vertici del quadrato

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \longrightarrow$ minimo assoluto

$f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = f\left(1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$

$f(1,-1) = f(-1,1) = 2$

$f(1,1) = 0 \quad , \quad f(-1,-1) = 4 \longrightarrow$ massimo assoluto

Ovviamente, stiamo utilizzando il teorema di Weierstrass

Esercizio 5. Sia $y = \phi(x)$ la funzione definita implicitamente da $\Phi(x,y) = xe^y + ye^x = 0$ intorno a $(0,0)$. Dopo aver verificato che ϕ è di classe C^2, scriverne lo sviluppo di Taylor del secondo ordine, con resto di Peano, centrato in $x = 0$.

$\Phi(0,0) = 0$

$\Phi_x(x,y) = e^y + y e^x$, $\quad \Phi_x(0,0) = 1 \neq 0$

Quindi siamo nelle ipotesi del teorema di Dini, che garantisce l'esistenza di ϕ di classe C^1 tale che, localmente, $\Phi(x, \phi(x)) = 0$. Risulta

$$\phi'(x) = -\frac{e^{\phi(x)} + \phi(x) e^x}{x e^{\phi(x)} + e^x}$$

Siccome $\phi \in C^1$, il secondo membro è di classe C^1 e quindi ϕ è di classe C^2. Lo sviluppo richiesto è

$$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \phi''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Abbiamo $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = -1$, $\phi''(0) = 4$; infatti, derivando

$$x e^{\phi(x)} + \phi(x) e^x = 0$$

$$e^{\phi(x)} + x\phi'(x) e^{\phi(x)} + \phi'(x) e^x + \phi(x) e^x = 0$$

$$e^{\phi(x)}\phi'(x) + \phi'(x) e^{\phi(x)} + x\phi''(x) e^{\phi(x)} + x\phi'(x)^2 e^{\phi(x)} + \phi''(x) e^x + \phi'(x) e^x + \phi'(x) e^x + \phi(x) e^x = 0$$

Calcolando in $x = 0$: $-1 - 1 + \phi''(0) - 1 - 1 = 0$

da cui $\phi''(0) = 4$.