CORSO DI LAUREA IN STATISTICA PER LE ANALISI DEMOGRAFICHE E SOCIALI
MATEMATICA III

A.A 2002/2003
PROF. PAOLO PAPI
PROGRAMMA DEL CORSO

Prima parte: calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili reali.

1. Richiami e complementi di Geometria euclidea in $\mathbb{R}^2$. Richiami sulla struttura di spazio euclideo di $\mathbb{R}^2$. Equazione canonica euclidea delle coniche: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole. Rappresentazione in coordinate polari. Insieme di definizione di una funzione di due variabili e sua rappresentazione grafica.

2. Elementi di topologia di $\mathbb{R}^2$. Intorni, insiemi aperti, chiusi. Frontiera, punti di accumulazione. Nozioni di limitatezza, compattezza, connessione. Confronto con la topologia della retta reale.

3. Limiti e continuità per funzioni di due variabili.

4. Differenziabilità per funzioni di due variabili. Derivate parziali e direzionali. Teorema di Schwartz (enunciato). Differenziabilità . Funzioni con gradiente nullo in un aperto connesso. Formula di Taylor (cenni).

5. Massimi e minimi per funzioni di due variabili. Definizioni. Condizione necessaria: annullamento del gradiente. Condizione necessaria: matrice Hessiana semidefinita. Condizione sufficiente: matrice Hessiana definita. Teorema di Weierstrass (enunciato); determinazione del massimo e del minimo assoluto di una funzione continua su un compatto.

Seconda parte: introduzione alle equazioni differenziali e agli integrali doppi.

Nozioni fondamentali; problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari e loro proprietà generali. Equazioni differenziali lineari del primo e secondo ordine a coefficienti costanti. Equazioni a variabili separabili.

Domini normali nel piano. Integrale di una funzione su un dominio normale. Formule di riduzione per integrali doppi. Passaggio a coordinate polari. Calcolo di $\int e^{-x^2}$.

TESTI CONSIGLIATI

[•] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Elementi di Analisi Matematica due (versione semplificata per i nuovi cosi di laurea)*, Ed. Liguori.

QUESITI TEORICI

Il candidato dovrà dar prova di conoscere le definizioni fondamentali, gli enunciati di tutti i teoremi elencati nel programma e le dimostrazioni dei seguenti risultati.

(1) Siano α, β, γ costanti reali positive. Il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}$$

esiste finito (e vale 0) se e solo se $\alpha+\beta>2\gamma$.

(2) Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, differenziabile in (x_0, y_0) è continua in (x_0, y_0).

(3) Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, una funzione derivabile in A. Se f_x, f_y sono continue in (x_0, y_0) allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

(4) Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso, una funzione avente gradiente nullo in A. Allora f è costante.

(5) Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, una funzione derivabile in (x_0, y_0). Se (x_0, y_0) è un punto di massimo o minimo relativo per f, allora $Df(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(6) Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^2(A)$. Se (x_0, y_0) è un punto di massimo (minimo) relativo per f, allora $D^2f(x_0, y_0)$ è semidefinita negativa (positiva).

(7) Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^2(A)$. Se $D^2f(x_0, y_0)$ è definita negativa (positiva), allora (x_0, y_0) è un punto di massimo (minimo) relativo per f.

(8) Si provi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$