Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali siano x_1, x_2, x_3. Si considerino i punti

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siano poi α il piano di equazione $x_1 + x_2 = 1$ ed s la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$.

(a). Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C.

(b). Determinare un'equazione vettoriale della retta $r = \pi \cap \alpha$.

(c). Determinare la posizione reciproca di r ed s.

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni seguenti:

$$F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a). Determinare la matrice di F rispetto alla base standard presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

(b). Determinare basi per $Ker(F)$ ed $Im(F)$.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, S il sottospazio delle matrici simmetriche e

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in V \mid \begin{cases} a_{12} - a_{13} + 2a_{33} = 0 \\ a_{13} + a_{31} = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a). Determinare basi per S e W.

(b). Determinare una base per $S \cap W$.

Esercizio 4. (a) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.

(b). Dare le definizioni di autovalore ed autovettore per un operatore lineare $F : V \to V$.

(c) (facoltativo) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $F : V \to V$ un operatore lineare. Si provi che gli autovalori di F sono le radici del polinomio caratteristico.

Esercizio 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare

$$F(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base standard presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. Scrivere inoltre $N^{-1}AN$.